<u>Tarea #1</u>

MA22A – Cálculo en Varias Variables
Semestre Otoño 2004

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Alfonso Toro
Sebastián Court

Problema 1: Sea X el conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto dado S. Para cada x $\in$ X, se define |x| como la cardinalidad del conjunto x. Se define, además una función d : X x X $\to N$, como:

$$d(x, y) = |x \Delta y|$$

Pruebe que d es una métrica en X.

Pregunta 2: Sea $(R^n, \| \quad \|)$ un espacio vectorial normado sobre el cuerpo de los números reales, $Q \subset R^n$ y $x_0 \in R^n$

Definición 1: Se dice que $x \in R^n$ es un desplazamiento interior para Q a partir de x_0 si existe una bola $B(x,\delta)$ y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $y \in B(x,\delta)$ y para todo $\eta \in]0,\varepsilon[$ se tiene que

$$x_0 + \eta y \in Q \qquad ,ie \qquad x_0 + \eta B(x,\delta) \in Q$$

Se anotará $\Gamma(Q, x_0)$ al conjunto de desplazamientos interiores para Q a partir de x_0.

Definición 2: Se dice que $x \in R^n$ es un desplazamiento adherente para Q a partir de x_0 si para toda bola $B(x,\delta)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in B(x,\delta)$ y $\eta \in]0,\varepsilon[$ talque

$$x_0 + \eta y \in Q \qquad ,ie \qquad x_0 + \eta B(x,\delta) \in Q$$

Se anotará $\Gamma^*(Q, x_0)$ al conjunto de desplazamientos adherentes para Q a partir de x_0.

Se pide:

i) Demostrar que $\Gamma(Q, x_0) = \left[\Gamma^*(Q^c, x_0)\right]^c$

$$\Gamma^*(Q, x_0) = \left[\Gamma(Q^c, x_0)\right]^c$$

donde Q^c designa al complemento de Q en R^n.

ii) Demostrar que

$\Gamma(Q, x_0)$ es abierto.

$\Gamma^*(Q, x_0)$ es cerrado.

iii) Si $x_0 \notin \overline{Q}$. Encuentre $\Gamma(Q,x_0)$, $\Gamma^*(Q,x_0)$.

iv) Encuentre $\Gamma(Q,x_0)$ y $\Gamma^*(Q,x_0)$ para los siguientes conjuntos.

$Q = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0 \wedge |y| \leq x^2\}$ $\qquad x_0 = (0,0)$
$Q = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\qquad x_0 = (1,0)$

Observación:
Puede serle útil saber que $\lambda B(x,\delta) = B(\lambda x, |\lambda|\delta)$ $\lambda \in R$ $\qquad y + B(x,\delta) = B(x+y,\delta)$

Pregunta 3: Sea C el conjunto de todas las funciones reales continuas en [0,1]. Para cada f , g $\in$C se definen:

$$\rho(f,g) = \underset{t\in[0,1]}{Sup}\left|f(t)-g(t)\right|$$

$$\sigma(f,g) = \left(\int_0^1 \left|f(t)-g(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Gamma(f,g) = \int_0^1 \left|f(t)-g(t)\right| dt$$

a) Suponga que f$\neq$ g. Luego existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$. Pruebe que existe un intervalo I$\subseteq [0,1]$ tal que $\left|f(t)-g(t)\right| \geq \frac{1}{2}\left|f(t_0)-g(t_0)\right|$ para todo t$\in$I. Deduzca que $\sigma(f,g) > 0$ y $\Gamma(f,g)$ >0.
b) Pruebe que ρ, σ y Γ son métricas en C.

Indicación : Puede serle útil utilizar la desigualdad de Schwarz para integrales:

$$\left(\int_0^1 \phi(t)\psi(t)\ dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 \phi^2(t)\ dt\right)\left(\int_0^1 \psi^2(t)\ dt\right)$$

c) Pruebe que para todo f , g $\in$C se tiene:
$$\rho(f,g) \geq \sigma(f,g) \geq \Gamma(f,g)$$
d) Para todo n$\in$ N , sea

$$f_n(t) = \begin{cases} 1-nt & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

y sea f(t)=0 para todo t$\in$[0,1].

i. Pruebe que (f_n) converge a f si $n \to \infty$ en (C, σ)
ii. ¿Converge (f_n) a f en (C, Γ)? Justifique.
iii. Pruebe que (f_n) no converge a f en (C, ρ)

Pregunta 4: Sea $C[0,1] = \{ f : [0,1] \to R / f \quad continua \}$. Se definen:

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} | f(x) - g(x) | \qquad \text{y} \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 | f(x) - g(x) | \, dx$$

a) Muestre que d_∞ y d_1 son métricas.
b) Muestre que $(C[0,1], d_\infty)$ es completo.
c) Sea la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0, 1/2 - 1/n[\\ n(x - 1/2) & x \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in]1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

¿Es $\{f_n\}$ de Cauchy en $(C[0,1], d_1)$? ¿Es completo $(C[0,1], d_1)$?

Pregunta 5: Sean los espacios normados $(R^n, \| \quad \|_{(n)})$ y $(R^m, \| \quad \|_{(m)})$ en que $\| \quad \|_{(n)}$ y $\| \quad \|_{(m)}$ son dos normas cualesquiera de R^n y R^m respectivamente; y sea $L : R^n \to R^m$ una aplicación lineal.

i) Demuestre que $(\forall L \in \ell(R^n \to R^m))(\exists c \geq 0)(\forall x \in R^n) \| L(x) \|_{(m)} \leq c \| x \|_{(n)}$

Indic.: Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de R^n, entonces $(\forall x \in R^n)$ $(\exists! \{x_i\}_{i=1}^n \subset R)$ tq $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Además recuerde que en R^n todas las normas son <u>equivalentes</u>, es decir sean $\| \ \|_\alpha$ y $\| \ \|_\beta$ dos normas cualquiera en R^n. Estas se dicen equivalentes si $\exists a,b$ positivos tales que $\|x\|_\alpha \leq a\|x\|_\beta \ \forall x \in R^n$ y además $\|x\|_\beta \leq b\|x\|_\alpha \ \forall x \in R^n$.

ii) Sea

$$\begin{aligned} \||\ \||: \ell(R^n \to R^m) &\to R^+ \cup \{0\} \\ L &\to Inf\{A\} \end{aligned}$$

con $A = \{c \geq 0 / \| L(x) \|_{(m)} \leq c \| x \|_{(n)} \ (\forall x \in R^n)\}$

Demuestre que $(\ell(R^n \to R^m), \||\ \||)$ es un espacio vectorial normado.

Puede serle útil probar que el conjunto $A = \{c \geq 0 / \| L(x) \|_{(m)} \leq c \| x \|_{(n)} \ (\forall x \in R^n)\}$ es cerrado y que por lo tanto $\forall x \in R^n \ \|L(x)\|_{(m)} \leq \||L\|| \ \| x \|_{(n)}$

iii) Sea *A* la matriz representante de *L* con respecto a la base canónica y sean

$\| \;\|_{(n)} = \| \;\|_2 \qquad \| \;\|_{(m)} = \| \;\|_2$

Demostrar que $\quad ||| L ||| = \sqrt{\lambda_n} \quad$ en que λ_n: máximo valor propio de $A^T A$

Pregunta 6: Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n. En E se define la función N : E $\rightarrow R$ por: $N(p) = \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)|$

i. Demuestre que N es una norma en E.

ii. Encuentre $L \in R$ tal que $\forall p \in E \quad N(p) \leq L \cdot Max|a_i|$ con i=0,..,n donde $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

iii. Sea $M = \{\lambda p / \lambda \in R\}$ donde $p(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^n$. Determine $M \cap B_N(0,1)$