Cálculo en Varias Variables

Auxiliares: G. Cisternas
M. Soto
C. Serpell

P1. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + z^3 &= 1 \\ x^5 + xy^2 - z^4 &= 1. \end{aligned}$$

(i) Muestre que es posible despejar x e y en función de z en una vecindad del punto $(1,0,0)$.

(ii) Encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}(0)$ y $\frac{\partial y}{\partial z}(0)$.

P2. Considere la función $f(x,y,z) = (xcos(y), sen(x-y), z^2)$

(i) Muestre que f es invertible en una vecindad de $(0,0,1)$.

(ii) Encuentre la matriz Jacobiana de la inversa en $f(0,01) = (0,0,1)$.

(iii) ¿Es $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ epiyectiva?. ¿Inyectiva?.

P3. Sea $f(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$

(a) Determinar todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ para los cuales f es localmente invertible.

(b) Hallar la matriz Jacobiana de f^{-1} en $(0,1,2)$ y determine la aproximación afín de f^{-1} en torno a dicho punto.

P4. Demostrar que la ecuación $x+y+z = sen(xyz)$ define a z como función de x e y en una vecindad de $(0,0,0)$ y hallar las derivadas parciales de segundo orden de z en términos de x, y, z.

P5. Se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 3x + uy - zx + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + y - 3z - u &= 0 \end{aligned}$$

Determine que trio de variables puede ser dejado en función de la otra variable para resolver el sistema.

P6. Considere las siguientes tres ecuaciones:

$$uz - 2e^{vz} = 0 \tag{1}$$
$$u - x^2 - y^2 = 0 \tag{2}$$
$$v^2 - xy\log(v) - 1 = 0 \tag{3}$$

en una vecindad del punto $x=0, y=e, u=e^2, v=1, z=2$

(i) Verifique que (1) define a z como función de u y v cerca de $u = e^2, v = 1, z = 2$.

(ii) Verificar que las ecuaciones (2) y (3) definen a u y v en función de x e y cerca de $u = e^2$ $v = 1$ y $y = e$.

(iii) Considere $f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$. Calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, e)$$

P7. Demuestre que $\forall a, b, c \geq 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(abc)^{2/3}$$

1) Usando que $-\ln(\cdot)$ es convexa.

2) Usando multiplicadores de Lagrange. Para esto, muestra que basta probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \quad \forall a, b, c \text{ tal que } abc = 1.$$

P8. Aplicar condiciones de optimalidad de primer y segundo orden para encontrar solución a las siguientes problemas de maximización.

(a) $\max x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

(b) $\max -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$

sujeto a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \wedge x_1, \ldots, x_n > 0$.

P9. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de

(a) $f(x, y) = (x - y)^n$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1 \quad n \geq 1$.

(b) $f(x, y) = x$ sujeto a $x^2 + 2y^2 = 3$.

(b) $f(x, y) = x + y^2$ sujeto a $2x^2 + y^2 = 1$.

P10. Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable y estrictamente convexa que satisface $U'(0) = 0$ y U' no acotada. Resuelve el problema de maximización

$$\max_{x_1, \ldots, x_n} \sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = G.$$

donde N y G son númernos naturales fijos.
Hint.: Recuerde que una función estrictamente creciente es inyectiva.

P11. Para cada $t \in \mathbb{R}$ considere la función $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_t(x, y) = sen(tx) - y.$$

Definimos como $(\mathcal{P}_t$ el problema de minimización

$$\begin{aligned} &\min f_t(x, t) \\ \text{s.a.} \quad &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

(a) Usando las condiciones de optimalidad de 1er y 2do orden, encuentre la solución de $(\mathcal{P}_0)$. Determine el multiplicador de Lagrange asociado.

(b) Pruebe que el sistema de Lagrange asociado a $(\mathcal{P}_t)$ tiene solución $(x(t), y(t), \lambda(t))$ para t en una vecindad de 0 con $(x(0), y(0), \lambda(0))$ la solución encontrada en (a).

(c) Usando (a) pruebe que el punto $(x(t), y(t))$ es efectivamente un mínimo verificando que la condición de segundo orden para $(\mathcal{P}_t)$ se satisface para t suficientemente peque no.

(d) Si se define $v(t) = f_t(x(t), y(t))$, justifique la diferenciabilidad de v en t, para t pequeño.

P12. Sea

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\min x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad &(x-1)^3 - y^2 = 0 \end{aligned}$$

(a) Justifique sin usar calculo diferencial que $(1, 0)$ es el punto mínimo del problema (P).

(b) Transforme (si es posible) el problema (P) de uno sin restricciones y determine el punto mínimo del problema resultante. Discuta su resultado con (a).

(c) Determine si el problema (P) puede ser resuelto mediante el Teorema de Lagrange. Discuta.

P13. Sea $x, y, z, u, v, w \geq 0$ tales que

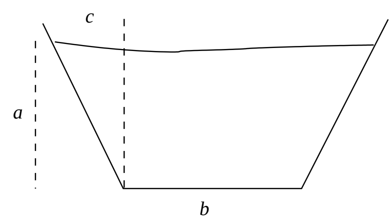
$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$$

Muestre que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{u + v + w}$.

14. Se necesita construir un canal de sección trapezoidal por el cual fluye un caudal constante $Q = 32m^3/s$.

Se sabe que el costo de su construcción $c(a, b, c)$ es proporcional al perímetro mojado del canal, es decir,

$C(a, b, c) = \beta(\overline{AB} + \overline{BC} + CD)$ (ver figura) y que el caudal $Q = 2$ area. Encuentre el diseño óptimo.



P15. Probar que el volumen del sólido limitado por los tres planos de coordenadas en $\mathbb{R}^3$ y el plano tangente a la superficie $xyz = a(a > 0)$, en un punto cualquiera de ella es constante.

16. Considere al aplicación definida por las ecuaciones

$$x = u + v \quad y = v - u^2.$$

Si T es el triángulo en el plano (u, v) con vertices $(0, 0), (2, 0)$ y $(0, 2)$ grafique la imagen S de T en el plano (x, y). Calcule la integral

$$\int\int_S (x - y + 1)^2 dxdy$$

mediante el cambio de variables de arriba.

17. a) Los cilindros $x^2 + y^2$ e $y^2 + z^2 \leq a^2$ se intersectan en una región S. Plantée la ingtegral que es necesario calcular para determinar la masa de esta región si la densidad de masa es $(x^2 + y^2 + 1)^2$. Escriba la integral en coordenadas cilíndricas y también en coordenadas cartesianas, indicando claramente los límites de las integrales iteradas.

b) Considere el cono circular abierto hacia arriba, con un ángulo θ_0 y con vértice en el punto $(0, 0, -a)$. Considere también la esfera de radio a centrada en el origen. Escriba la integral que hay que calcular para determinar el volumen del cono contenido en la esfera, indicando claramente los límites de las integrales iteradas.