MA 22A Cálculo en Varias Variables

Prof. P. Felmer
Auxiliares: G. Cisternas
M. Soto
C. Serpell

P1. Sea $f : (a, b) \to I\!R$ continua. Probar que si

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \forall x, y \in (a, b)$$

$\Rightarrow f$ es convexa.

P2. Si f es convexa en (a, b) y si

$$a < s < t < u < b \Rightarrow \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

P3. $f : A \subset I\!R^n \to I\!R$, A convexo.
a) Muestre que f es convexa $\Leftrightarrow \{(x, y) \in A \times I\!R / y \geq f(x)\}$ es convexo. Este conjunto se llama epigrafo.
b) Muestre que f es convexa $\Leftrightarrow f(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$ si $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in A$.
c) Sea C un conjunto convexo y

$$f(x) = dist(x, c) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

Muestre que f es convexa.

P4. a) Determinar los puntos de la superficie de ecuación $z^2 - xy = 1$, que stán a menor distancia del origen.
b) Analizar los puntos críticos de

$$f(x, y) = (2x + y)e^{-(4x^2+y^2)}.$$

P5. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ definida por

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

Muestre que:

a) el origen es punto crítico.
b) f tiene un mínimo local en $(0,0)$ a lo largo de cada recta que pasa por $(0,0)$, esto es, si $g(t)=(at,bt)$, entonces $f(g(t)):I\!R\to I\!R$ tiene un mínimo local en 0 para cada $(a,b)\in I\!R^2$.
c) $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

P6. Sea $f\in C^2(I\!R^n)$ y x_0 un punto crítico no degenerado: demuestre que x_0 es un punto aislado en el conjunto de los puntos críticos de f.

P7. Sea $f:I\!R^n\to I\!R$ convexa y tal que $\inf\limits_{x\in I\!R^n} f(x)\in I\!R$. Demuestre que el conjunto

$$C=\{x\in I\!R^n/x \text{ es un mínimo local de } f\}$$

es no vacío y convexo.

Ind: Muestre que f tiene el mismo valor sobre todos los mínimos locales i.e. si x_1, y_2 son mínimos locales, entonces

$$f(x_1)=f(x_2).$$

P8. Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T:E\to E$ función. Demuestre que si existe $k\in I\!N k>1$, tal que

$$T^{(k)}=\underbrace{T\circ\cdots\circ T}_{k \text{ veces}}$$

es contractante i.e. $\exists k\geq 1$ y $0\leq L<1$

$$\|T^{(k)}(x)-T^{(k)}(y)\|\leq L\|x-y\|\forall x,y\in E,$$

entonces T posee un único punto fijo en E.

P9. Considere el espacio $E=C([0,1],I\!R)$, con la norma $\|u\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|u(x)|$. Se define el operador $T:E\to E$ por

$$T(u)(y)=\frac{1}{2(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2-n}})}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[sen(u(y))]^{2^n}}{2^{n^2}}dy$$

Muestre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{2^{n^2}}$ es absolutamente convergente en $[-1,1]$. (Por lo que T queda bien definida), y muestre que T es contractante. Concluya que la ecuación

$$u(y)=\frac{1}{2(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2-n}})}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[sen(u(y))]^{2^n}}{2^{n^2}}dy$$

tiene una y sólo una solución en E.

P10. Sea $E = C([0, \frac{1}{2}], I\!R)$, con la norma del supremo. Sea $T : E \to E$

$$T(u)(x) = \int_0^x cos(sxu(s))ds$$

Muestre que T es contractante. Deduzca que la ecuación $(1)u(x) = \int_0^x cos(xsu(s))ds$, tiene una única solución en E.

P11. ¿ Por qué esta equivocado el siguiente argumento? Suponer que $\omega = F(x, y, z) \wedge z = g(x + y)$. Por regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

de modo que $\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \vee \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, lo cual es, en general absurdo.

P12. Encuentre el polinomio de Taylor de 2 de orden de:
(a) $F(x, y) = e^{(x-1)^2} cos(y), x_0 = 1, y_1 = 0$
(b) $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}, x_0 = y_0 = 0$.

P13. Sea $g : I\!R \to I\!R$ una función de clase C^2 y sea $f : I\!R^n \to I\!R$, con $n \geq 3$, la función $f(x) := g(\|x\|)$
(i) Probar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r)$$

con $r = \|x\|, x \neq 0$.
(ii) Probar que si $\Delta f = 0$, entonces

$$f(x) = \frac{a}{\|x\|^{n-2}} + b, x \neq 0.$$

P14. Encontrar la máxima y mínima distancia al origen de la curva

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4 = 0$$

Bosqueje gráficamente.

P15. Demuestre que la caja de volumen máximo que puede ser colocada dentro de una ésfera de radio R es un cubo.

P16. i) Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función diferenciable. Se definen las funciones $G : I\!R \to I\!R$ y $h : I\!R^n \to I\!R$ por

$$G(t) = f(t, t, ..., t)$$
$$h(x_1, \cdots, x_n) = G(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n})$$

(i) (2ptos) Calcule $G'(t)$ y $\nabla h(x_1, \cdots, x_n)$ en terminos de las derivadas parciales de f.

(ii) (1pto.) Pruebe que

$$\forall x \in I\!R, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f-h)}{\partial x_i}(x, \cdots, x) = 0$$