DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN77S "ECONOMIA DEL SECTOR PUBLICO"
Problema 9, Guía año 2004

PROFESOR: Andrea Repetto
PROF. AUXILIAR: Alvaro García

Pregunta:

Suponga que en la economía existen dos consumidores, A y B, y dos bienes, 1 y 2, con las siguientes funciones de utilidad:

$$U^A(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2 \tag{1}$$
$$U^B(x_1, x_2) = \beta \ln x_1 + (1-\beta) \ln x_2 \tag{2}$$

A y B tienen un ingreso fijo de y^A e y^B, respectivamente. Los precios al productor de ambos bienes son iguales a 1. El gobierno necesita recaudar un monto R (con $R < y^A + y^B$).

a. Suponga que el gobierno busca recaudar R poniendo impuestos proporcionales a los bienes 1 y 2 y que la función de bienestar del gobierno es $W = U^A + U^B$. Plantee el problema del gobierno y obtenga las condiciones de primer orden que caracterizan el sistema óptimo de impuestos.

   Respuesta

   Lo primero es plantear la función de utilidad indirecta condicional de cada consumidor. Para ello resolvemos el problema que enfrenta que es[1]

$$\max_{x_1,x_2} \quad \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$$
$$s.a$$
$$y_A \geq p_1 x_1 (1+t_1) + p_2 x_2 (1+t_2)$$

   El Lagrangeano asociado a este problema es:

$$\mathcal{L} = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2 + \lambda \left[y_A - p_1 x_1 (1+t_1) + p_2 x_2 (1+t_2) \right]$$

   Usando el hecho que los precios de ambos bienes son 1, las condiciones de primer orden quedan dadas por:

$$x_1: \quad \frac{\alpha}{x_1} = \lambda(1+t_1)$$
$$x_2: \quad \frac{(1-\alpha)}{x_2} = \lambda(1+t_2)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x_1(1+t_1)}{\alpha} = \frac{x_2(1+t_2)}{1-\alpha}$$

[1] Resolvemos el problema del consumidor A. El caso del individuo B es análogo

agregando la condición sobre el multiplicador (que no es más que la restricción presupuestaria) se tiene:

$$y_A = x_1(1+t_1) + x_2(1+t_2)$$

lo que reemplazado en la condición anterior permite concluir:

$$x_1^A = \frac{y_A \alpha}{1+t_1} \text{ y } x_2^A = \frac{y_A(1-\alpha)}{1+t_2}$$

Análogamente para B se tiene:

$$x_1^B = \frac{y_B \beta}{1+t_1} \text{ y } x_2^B = \frac{y_B(1-\beta)}{1+t_2}$$

Las funciones de utilidad indirecta quedan dadas por:

$$\begin{aligned} V_A(t, y_A) &= \alpha \ln \tfrac{y_A \alpha}{1+t_1} + (1-\alpha) \ln \tfrac{y_A(1-\alpha)}{1+t_2} \\ V_B(t, y_B) &= \beta \ln \tfrac{y_B \beta}{1+t_1} + (1-\beta) \ln \tfrac{y_B(1-\beta)}{1+t_2} \end{aligned}$$

lo que permite obtener la función de utilidad del gobierno:

$$\begin{aligned} V \quad = \quad & \alpha \ln y_A \alpha + \beta \ln y_B \beta - (\alpha+\beta)\ln(1+t_1) - (2-\alpha-\beta)\ln(1+t_2) \\ & + (1-\alpha)\ln(y_A(1-\alpha)) + (1-\beta)\ln(y_B(1-\beta)) \end{aligned}$$

El problema que resuelve el gobierno es:

$$\begin{aligned} &\max_{t_1, t_2} \quad V(t_1, t_2) \\ &\quad s.a \\ &\qquad R \leq x_1 t_1 + x_2 t_2 \end{aligned}$$

las condiciones de primer orden quedan dadas por:

$$\begin{aligned} t_1 : &\qquad \tfrac{(\alpha+\beta)(1+t_1)}{y_A\alpha + y_B\beta} = \lambda \\ t_2 : &\qquad \tfrac{(2-\alpha-\beta)(1+t_2)}{y_A(1-\alpha) + y_B(1-\beta)} = \lambda \\ \Rightarrow &\quad \tfrac{(\alpha+\beta)(1+t_1)}{y_A\alpha + y_B\beta} = \tfrac{(2-\alpha-\beta)(1+t_2)}{y_A(1-\alpha) + y_B(1-\beta)} \end{aligned}$$

b. ¿En qué circunstancias los impuestos a los bienes serán iguales ($t_1 = t_2$)? ¿Qué tasa será más alta si $y^A > y^B$ y $\alpha > \beta$? Explique intuitivamente sus respuestas.

Respuesta

De la condición obtenida en (a) podemos ver cuál será la condición para que t_1 sea igual a t_2.

Despejando, se llega a que

$$(\alpha+\beta)(y_A(1-\alpha) + y_B(1-\beta)) = (2-\alpha-\beta)(y_A\alpha + y_B\beta)$$

Desarrollando se llega a:

$$(\alpha-\beta)(y_A-y_B)=0$$

luego $t_1=t_2 \;\; ssi \;\; y_A=y_B \;\; o \;\; \alpha=\beta$

Si $\alpha=\beta$, entonces las preferencias de ambos individuos son idénticas. Esto implica que el gobierno solo observa un tipo de individuo. Además, los efectos cruzados son nulos y las elasticidades precio demanda de ambos bienes serán iguales a -1. En tal caso, la regla del inverso de la elasticidad nos asegura que el impuesto es igual para ambos bienes.

Si $y_A=y_B$ entonces el gasto de ambos individuos es el mismo. En tal caso, el óptimo se dará cobrando la misma carga a cada uno. Esto se logra gravando más a los bienes más preciados. Si $\alpha\neq\beta$, entonces un bien será más deseado por el individuo A (relativo a B) y el otro lo será más por el B (relativo a A). En tal caso, gravando igual a ambos bienes, se tendrá que cada uno pague la misma cantidad de impuestos.

Si $y_A>y_B$ y $\alpha>\beta$, entonces t_1 será mayor que t_2 (esto se puede demostrar). La razón de esto es que de esta manera se estará recaudando la mayor parte del impuesto gravando más al bien más apetecido por el individuo de mayores ingresos (relativo a las preferencias del individuo de menores ingresos). En caso contrario, se estará poniendo impuestos sobre el bien que más prefiere el individuo de menor ingreso (relativo a las preferencias del individuo de mayores ingresos), lo que implica una suerte de regresividad en el sistema impositivo.

c. Calcule la pérdida de bienestar para el individuo A de un sistema de impuestos como el encontrado en la parte a, como función de t_1 y t_2. Explique.

Respuesta

La pérdida la calculamos como la diferencia de utilidad entre la situación sin impuestos y la situación con impuestos.

Sin impuestos se tiene

$$V(\overrightarrow{t}=0)=\alpha\ln(\alpha y_A)+(1-\alpha)\ln((1-\alpha)y_A)$$

Con impuestos, en cambio, la utilidad está dada por

$$V(\overrightarrow{t}=(t_1,t_2))=\alpha\ln\left(\frac{\alpha y_A}{1+t_1}\right)+(1-\alpha)\ln\left(\frac{(1-\alpha)y_A}{1+t_2}\right)$$

La diferencia está dada por

$$\begin{aligned}\Delta V &= \alpha\ln(1+t_1)+(1-\alpha)\ln(1+t_2)\\ &= \ln(1+t_1)^{\alpha}(1+t_2)^{1-\alpha}\end{aligned}$$

La incidencia de los impuestos será mayor para aquel bien que tenga un impuesto mayor. [2] Por otra parte, las preferencias influyen "ponderando" la incidencia del impuesto a cada bien, de manera tal que mientras más se prefiera un bien, el impuesto correspondiente generará mayor pérdida.

[2] Notar que si $t_1=t_2$ el efecto es independiente del individuo (recordar parte b).