



CONTROL 2

Martes 1 de Junio de 2004

Problema 1

1. (3.0 pts) Dado el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \text{mín} & f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, \ell \\ & x \in X. \end{cases}$$

donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g_i, h_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, \ell$.

sea (D) el problema Dual Lagrangeano asociado al problema (P)

- ¿Qué dice el Teorema Débil de Dualidad para este caso?
 - Plantee la función Lagrangeana asociada al problema (P)
 - Defina el punto silla de la función Lagrangeana.
2. (3.0 pts) Considere un problema de programación lineal de la forma

$$\begin{cases} \text{mín} & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Usando dualidad lagrangiana encuentre el dual de este problema.

Problema 2

Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín} \quad f(x) = e^{-x_1} + e^{-2x_2} \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

En lo que sigue, considere la aplicación del método de Zoutendijk. Suponga que el punto inicial viene dado por $x^0 = (0, 1)$.

1. (2.0 pts) Formule y resuelva el problema de *search direction* para la primera iteración ¿Garantiza su formulación que se encontrará la dirección de menor tasa local de decrecimiento?. Justifique su respuesta.

2. (1.0 pts) Formule el problema de *line search* asociado a la primera iteración.
3. (1.0 pts) Indique cómo se modifica la formulación del problema de *search direction* al cambiar la primera restricción por:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

4. (1.5 pts) ¿En que consiste la modificación de Topkin-Veinott? ¿Como afecta el desempeño del algoritmo?.
5. (0.5 pts) ¿Cómo detecta el método de Zoutendijk el no acotamiento de un problema?

Problema 3

1. (1.5 pts) Explique dos estrategias de elección de nodos en el algoritmo de Branch and Bound, especificando las ventajas de cada una de ellas.
2. (1.5 pts) Sea el siguiente problema de Programación Fraccional:

$$(P) \min f(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta}$$

$$x \in S$$

donde $p, q, x \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^m$, y $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$

¿Qué condiciones se deben dar para que el problema sea no acotado? Analice los casos donde el conjunto S compacto y S no compacto.

3. (3.0 pts) En este problema se analizan distintas posibilidades de localización de los óptimos en un problema de programación cuadrática.
 - a) Muestre que en un problema de programación cuadrática convexa el óptimo puede encontrarse en cualquier parte del conjunto factible. Para esto considere la matriz $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y proponga un par de problemas de la forma

$$\min \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x : Ax \leq b \right\}$$

tales que en uno de ellos el óptimo esté en el interior del conjunto factible y en el otro el óptimo se encuentre en la frontera del conjunto factible. Observe que en este caso el vector de variables $x = (x_1, x_2)^T$ cuenta con sólo dos componentes.

- b) Demuestre que en un problema de programación cuadrática, con conjunto factible no vacío acotado y cuya función objetivo es minimizar una función cóncava siempre existe un vértice (punto extremo) del conjunto factible que es óptimo.