



Problemas Extras¹

Dudas y consultas a: Ignacio Llanos illanos@ing.uchile.cl
Álvaro Stein astein@dii.uchile.cl

Solución Problema N°1

a) Se tiene que la utilidad de una empresa i cualquiera está dado por $\Pi_i = 2\theta x_i^{1/2} - (a + px_i)$.
Cada empresa desea maximizar sus utilidades. Luego se encuentra x^* óptimo haciendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = 0 &\Rightarrow 2\theta \cdot \frac{1}{2} x_i^{-1/2} - p = 0 \\ \Leftrightarrow x_i^{-1/2} &= \frac{p}{\theta} \quad \wedge \quad p, \theta > 0 \\ \Rightarrow x^* &= \frac{\theta^2}{p^2} \quad (1)\end{aligned}$$

Debido a que IBM puede discriminar perfectamente, extrae por completo el excedente de los consumidores. Luego:

$$\Pi_i = 2\theta x_i^{1/2} - (a + px_i) = 0$$

Ahora reemplazamos x_i por x^* óptimo de la ecuación número 1 y luego despejamos a .

$$\begin{aligned}2\theta \left(\frac{\theta^2}{p^2} \right)^{1/2} - \left(a + p \frac{\theta^2}{p^2} \right) &= 0 \Leftrightarrow a = 2\theta \cdot \frac{\theta}{p} - \frac{\theta^2}{p} \\ \Rightarrow a &= \frac{\theta^2}{p} \quad (2)\end{aligned}$$

Por otro lado, las utilidades de IBM están dadas por $\Pi_{IBM} = (a + px) - cx$. Pero se sabe que las empresas demandarán x^* óptimo (ecuación 1) y que el valor fijo a que se debe cobrar está dado por la ecuación 2, por lo que las utilidades de IBM quedan de la siguiente forma:

¹ Los 3 problemas son de la guía 2 (Monopolio y discriminación), disponible en Ucursos (Material docente → Guías).

$$\Pi_{IBM} = (a + px) - cx = a + (p - c)x^* = \frac{\theta^2}{p} + (p - c)\frac{\theta^2}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{IBM} = 2\frac{\theta^2}{p} - c \cdot \frac{\theta^2}{p^2} \quad (3)$$

Por su parte, la empresa IBM también desea maximizar sus utilidades.

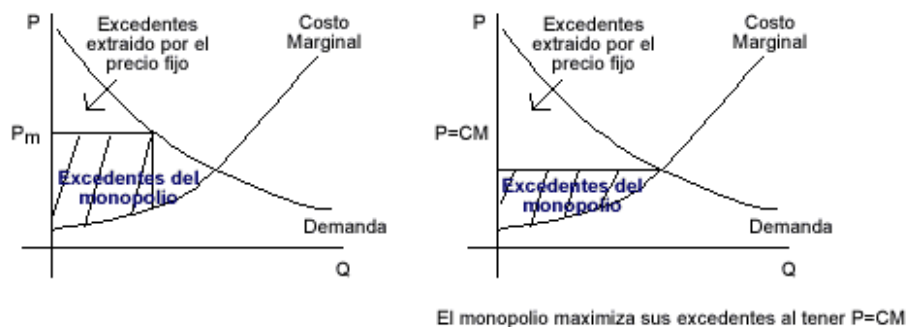
$$\frac{\partial \Pi_{IBM}}{\partial p} = -2\frac{q^2}{p^2} + 2c \cdot \frac{q^2}{p^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{q^2}{p^2} = 2c \cdot \frac{q^2}{p^3} \Leftrightarrow \frac{c}{p} = 1$$

$$\Leftrightarrow c = p \quad (4)$$

Al discriminar perfectamente, el monopolio cobrará por cada tarjeta un precio variable igual a sus costos marginales y cobrará una parte fija igual al excedente neto de cada consumidor al precio c .

Gráficamente



Las condiciones que deben darse para que un monopolista pueda discriminar en primer grado (en forma perfecta) son:

Debe tener información sobre las preferencias de cada consumidor

No debe existir arbitraje entre los consumidores

b)

Para que la tarifa en 2 partes sea factible se deben cumplir las siguientes condiciones:

El monopolista debe ser capaz de impedir el consumo de alguien que no pague el costo fijo. Por ejemplo: que no ocurra que una persona pague la parte fija y revenda el bien.

El monopolista debe conocer las preferencias o función de utilidad de los distintos tipos de consumidores.

IBM no podría discriminar en segundo grado porque no sería capaz de quitar la reventa de las tarjetas.

c)

En este caso, el problema que resuelve IBM es el siguiente

$$\text{Max} \Pi_{IBM} = \frac{1}{2} \cdot [(a + px_1) - cx_1] + \frac{1}{2} \cdot [(a + px_2) - cx_2]$$

s.a.

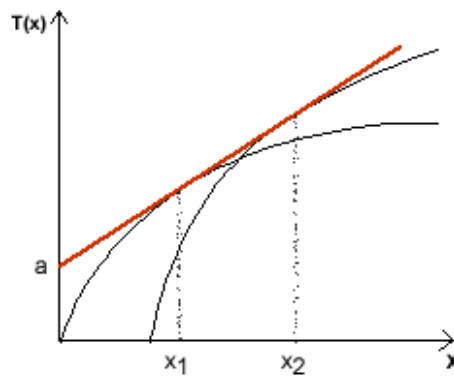
- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1) $\Pi_1 = 2q_1x_1^{1/2} - (a + px_1) \geq 0$ | Restricción de Participación de 1 |
| 2) $\Pi_2 = 2q_2x_2^{1/2} - (a + px_2) \geq 0$ | Restricción de Participación de 2 |
| 3) $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = q_1x_1^{-1/2} - p = 0$ | Restricción de incentivos de 1 |
| 4) $\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = q_2x_2^{-1/2} - p = 0$ | Restricción de incentivos de 2 |

d)

$$\begin{aligned} \Pi_{IBM} &= \frac{1}{2} \cdot [(a + px_1) - cx_1] + \frac{1}{2} \cdot [(a + px_2) - cx_2] \\ \Rightarrow \Pi_{IBM} &= a + (p - c) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 \right) \end{aligned}$$

La tarifa **a** debe ser tal que ambos consumidores estén dispuestos a pagar y que a la vez maximice las utilidades de IBM.

Gráficamente:



Utilizando los datos y el resultado obtenido en la parte (a) tenemos que: $a = \frac{q_1^2}{p} = \frac{1}{p}$. Así se le extrae todo el excedente al consumidor 1 y el consumidor 2 está dispuesto a pagar dicha suma.

Por la restricción (3) y (4) tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{q_1^2}{p^2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{q_2^2}{p^2} \\ \therefore x_1 &= \frac{1}{p^2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{4}{p^2} \end{aligned}$$

Reemplazando los diferentes resultados en la función utilidad de IBM obtenemos:

$$\Pi_{IBM} = \frac{1}{p} + (p-1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{p^2} \right) = \frac{7}{2p} - \frac{5}{2p^2}$$

Ahora se debe maximizar las utilidades de IBM para encontrar la tarifa óptima.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{IBM}}{\partial p} &= \frac{-7}{2p^2} + \frac{5}{p^3} = 0 \\ \Rightarrow \frac{7p^3}{2} &= 5p^2 \Rightarrow p^2 = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

La tarifa quedó de la siguiente forma: $\boxed{T = \frac{7}{10} + \frac{10}{7} \cdot x}$

Solución Problema N°4

- a) Para determinar la demanda que enfrentará el monopolio buscaremos la ubicación del último comprador

$$q(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - p - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - p$$

Por lo tanto la demanda que enfrentará el monopolio es

$$\begin{aligned} D(p) &= \int_0^{1-p} (1 - p - x) dx = \left[x - px - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1-p} = 1 - p - (1 - p)p - \frac{(1 - p)^2}{2} \\ D(p) &= \frac{1 - 2p + p^2}{2} \end{aligned}$$

Ahora que tenemos la demanda² podemos plantear el problema del monopolio

$$\underset{p}{\text{Máx}} \left(\frac{1 - 2p + p^2}{2} \right)$$

² Para comprobar si la demanda resultante es razonable revisamos la derivada, ya que sabemos que la demanda debe ser decreciente con respecto al precio (excepto los bienes de Giffen):

$$\frac{\partial D(p)}{\partial p} = -2 + 2p = 2(p - 1)$$

Como $p < 1$ la derivada es negativa, por lo que la demanda se decreciente en el precio.

Resolviendo:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p} = \frac{1}{2}(1 - 4p + 3p^2) = 0$$

Tenemos una ecuación cuadrática, por lo que obtendremos dos resultados.

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = \frac{1}{3}$$

Intuitivamente podemos ver que $p = 1$ es un mínimo, ya que en ese caso las utilidades son cero, pues no hay ventas. En todo caso para despejar dudas evaluaremos la segunda derivada.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial p^2} = \frac{1}{2}(-4 + 6p) = -2 + 3p \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{p}(p_1)}{\partial p^2} > 0, \frac{\partial^2 \mathbf{p}(p_2)}{\partial p^2} < 0$$

Por lo tanto $p = 1$ es mínimo y $p = 1/3$ es máximo.

Ahora podemos determinar a cuanto ascienden las utilidades³ con $p = 1/3$.

$$\mathbf{p} = p \left(\frac{1 - 2p + p^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{27}$$

- b) El monopolio puede discriminar, por lo que cobrará un precio que dependerá de la ubicación (x) del cliente (conocida).

$$\begin{aligned} \underset{p}{\text{Máx}} \mathbf{p}_i &= p(1 - p - x) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial p} &= 1 - 2p - x = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1 - x}{2} \end{aligned}$$

Podemos ver que con esta función de precios se les vende a todos los clientes, de hecho a los ubicados en $x = 1$ se les cobrará cero (gratis!!!).

Necesitamos ver a cuanto ascienden las utilidades:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_0^1 p(x) D(p(x)) = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2} \right) \left(1 - \left(\frac{1-x}{2} \right) - x \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2} \right) \left(\frac{1-x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = \\ \mathbf{p} &= \frac{1}{4} \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left[1 - 1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Además podemos notar que las utilidades son mayores que en la parte a).

³ Las utilidades con $p = 1$ son cero, lo que es consistente con nuestra intuición de que este valor era un mínimo.

c) El excedente de los consumidores viene dado por:

- Para $x = 0$ el consumidor tendrá un excedente de:

$$E_a^{x=0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \text{ y } E_b^{x=0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Es decir preferirá el primer sistema de precios.

- Para $x = 1/2$ el consumidor tendrá un excedente de:

$$E_a^{x=1/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \text{ y } E_b^{x=1/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

Por lo que preferirá el primer sistema de precios.

- Para $x = 1$ el consumidor tendrá un excedente de:

$$E_a^{x=1} = 0^4 \text{ y } E_b^{x=1} = \frac{1}{2} (1 - 0) 0 = 0$$

Este consumidor estará indiferente.

Los resultados que obtuvimos son lógicos, ya que un sistema de discriminación permite sacar una mayor porción del excedente de los consumidores⁵.

Si los consumidores eligieran cuál sistema prefieren ellos votarán por el de no discriminación, en el caso de que el único votante sea el PSB entonces este preferirá el segundo sistema, ya que no le importa como se reparte el excedente, sino que este sea mayor⁶.

⁴ No participa, ya que a este precio no demandará.

⁵ En el caso de discriminación perfecta se logra extraer todo el excedente de los consumidores.

⁶ Es decir, maximiza el bienestar social, sin importar como se distribuye el beneficio.