

Clase Auxiliar 28/04/2004¹

Dudas y consultas a: Ignacio Llanos illanos@ing.uchile.cl
Álvaro Stein astein@dii.uchile.cl

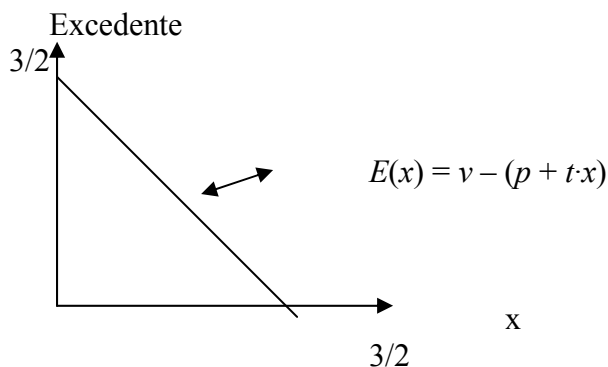
Solución Problema N°4

- a) Sabemos que el excedente de cada consumidor depende de la valoración y el costo de transporte, que a su vez depende de la ubicación. La restricción que debe cumplirse es que el excedente debe ser mayor que cero, luego:

$$v - (p + tx) \geq 0$$

Reemplazando los valores tenemos que $2 - (\frac{1}{2} + x) \geq 0$, es decir comprarán solo los $x < 3/2$.

Gráficamente



Sabemos que los consumidores están ubicados uniformemente² a lo largo de la carretera, por lo que para determinar la demanda necesitamos saber cuantas personas viven entre $0 < x < 3/2$. Supongamos que la densidad poblacional³ es ρ . Luego:

$$D = \int_0^{3/2} \rho dx = [\rho x]_0^{3/2} = \frac{3\rho}{2}$$

- b) Tenemos que generalizar el resultado anterior, para esto encontraremos el límite o frontera de compra, es decir el x máximo al que puede vender el monopolio.

¹ Los 3 problemas son de la guía 2 (Monopolio), disponible en U-cursos (Material docente → Guías).

² Si $x \rightarrow U[a, b] \Rightarrow$ para un c tal que $a < c < b$ se tiene que $\Pr ob(x < c) = \int_a^c \frac{dx}{b-a} = \frac{c-a}{b-a}$.

³ $\rho = \frac{1}{b-a}$.

$$v - (p + tx) \geq 0$$

$$x \leq \frac{v - p}{t}$$

Luego la demanda será

$$D(p) = \int_0^{\frac{v-p}{t}} \rho dx = \left[\rho x \right]_0^{\frac{v-p}{t}} = \frac{\rho(v-p)}{t}$$

c) El problema del monopolio es

$$\max_p \pi = p \frac{\rho(v-p)}{t} = \frac{\rho}{t} (vp - p^2)$$

La condición de primer orden es

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{\rho}{t} (v - 2p) = 0$$

Al resolver tenemos que $p = v/2$

Por lo que la cantidad será $\frac{\rho v}{2t}$ y las utilidades $\pi = \frac{\rho v^2}{4t}$.

d) En este caso *Frigerio* enfrenta dos decisiones:

- Cuál será el precio? (p)
- A quienes se les venderá? (\bar{x})

Si *Frigerio* ofrece asumir los costos de transporte entonces todos los posibles compradores tendrán excedente positivo si $v > p$. Por lo que la demanda será:

$$D(p) = \int_0^{\bar{x}} \rho dx = \rho \bar{x}$$

Si $v < p$ la demanda será 0 (Nadie compra si no le reporta beneficio⁴).

Además debemos considerar que por cada venta habrá costos de transporte, luego los costos serán:

$$C(x) = \int_0^{\bar{x}} tx dx = \frac{tx^2}{2}$$

El problema del monopolista en este caso es

$$\max_{p,x} \pi = p\rho x - C(x) = p\rho x - \frac{tx^2}{2}$$

s.a

$$p < v$$

El Lagrangeano es

⁴ Este es una regla de oro en Economía: Si se genera una transacción, es porque vendedor y comprador resultan beneficiados, ya que si no fuese así uno el perjudicado preferiría no comerciar.

$$L = p\rho x - \frac{tx^2}{2} - \lambda(p - v)$$

Las condiciones de primer orden son

$$p : \frac{\partial L}{\partial p} = \rho x - \lambda = 0$$

$$x : \frac{\partial L}{\partial x} = p\rho - tx = 0$$

La primera condición indica que la restricción será activa, ya que el multiplicador de Lagrange es igual al precio, y estos siempre son positivos. Por lo tanto el precio será igual a la valoración ($p = v$).

La segunda condición indica que el monopolio solo venderá a quienes estén ubicados hasta que $x \leq (\rho v)/t$.

Por lo tanto las utilidades serán
$$\pi = \frac{v^2 \rho^2}{t} - \frac{(\rho v)^2}{2t} = \frac{(\rho v)^2}{2t}.$$

e) Tenemos que evaluar cuál estrategia será la óptima dado que $v = 2$ y $t = 1$.

- Sin asumir costos

$$\pi = \frac{\rho v^2}{4t} = \rho$$

- Asumiendo costos de Transporte

$$\pi = \frac{(\rho v)^2}{2t} = 2\rho^2$$

Por lo tanto cuál alternativa sea la mejor depende de la densidad poblacional y se preferirá no asumir los costos de transporte siempre y cuando $\rho < 1/2$.

Solución Problema N°7

a)

$$q_1 = 1 - p_1 + \alpha q_2$$

$$q_2 = 1 - p_2 + \alpha q_1$$

Por lo tanto:

$$p_1 = 1 - q_1 + \alpha q_2$$

$$p_2 = 1 - q_2 + \alpha q_1$$

Utilidad Conjunta

$$U = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

$$= (1 - q_1 + \alpha q_2) q_1 + (1 - q_2 + \alpha q_1) q_2$$

$$dU/dq_1 = 1 - 2q_1 + \alpha q_2 + \alpha q_2 = 0 \quad (1)$$

$$dU/dq_2 = 1 - 2q_2 + \alpha q_1 + \alpha q_1 = 0 \quad (2)$$

De (1)=(2) se tiene

$$1 - 2q_1 + 2\alpha q_2 = 1 - 2q_2 + 2\alpha q_1$$

$$q_2 + \alpha q_2 = q_1 + \alpha q_1$$

$$q_2(1+\alpha) = q_1(1+\alpha)$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 = q$$

De (1)

$$1 - 2q + \alpha q + \alpha q = 0$$

$$\therefore q = \frac{1}{2(1-\alpha)}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 1 - (1 - \alpha q) \\ p_2 = 1 - (1 - \alpha q) \end{array} \right\} p_1 = p_2 = p \quad \therefore p = 1 - \frac{1-\alpha}{2(1-\alpha)} = \frac{1}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(1-\alpha)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(1-\alpha)} \right) = \frac{1}{2(1-\alpha)}$$

Período a Período

$$U_1 = p_1 q_1 = (1 - q_1 + \alpha q_2) q_1$$

$$U_2 = p_2 q_2 = (1 - q_2 + \alpha q_1) q_2$$

$$dU_1/dq_1 = 1 - 2q_1 + \alpha q_2 = 0 \quad (3)$$

$$dU_2/dq_2 = 1 - 2q_2 + \alpha q_1 = 0 \quad (4)$$

De 2(3)+ □(4) se tiene

$$2 - 4q_1 + 2\alpha q_2 + \alpha - 2\alpha q_2 + \alpha^2 q_1 = 0$$

$$2 + \alpha - 2\alpha q_2 = (4 - \alpha^2) q_1$$

$$q_1 = \frac{2 + \alpha}{(2 + \alpha)(2 - \alpha)} = \frac{1}{2 - \alpha}$$

$$q_2 = \frac{1}{\alpha} \left(2 \left(\frac{1}{2 - \alpha} \right) - 1 \right) = \frac{1}{2 - \alpha}$$

$$\therefore q_1 = q_2$$

$$p_1 = p_2 = 1 - (1 - \alpha)q = \frac{2 - \alpha - (1 - \alpha)}{2 - \alpha} = \frac{1}{2 - \alpha}$$

$$U_b = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 2 \left(\frac{1}{2 - \alpha} \cdot \frac{1}{2 - \alpha} \right) = \frac{2}{(2 - \alpha)^2}$$

$$pdq \quad U_a > U_b$$

$$U_a > U_b \Leftrightarrow \frac{1}{2(1 - \alpha)} > \frac{2}{(2 - \alpha)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2 - \alpha)^2 > 4(1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\alpha + \alpha^2 > 4 - 4\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 > 0$$

Por lo tanto $U_a > U_b$

La maximización de un problema sujeto a restricciones nunca puede ser mayor a la maximización del mismo problema sin restricción alguna.

Solución Problema N°13

a) El problema que resuelve el monopolista es:

$$\max_{I, q} p(q)q - C(I)q - I$$

Las condiciones de primer orden son:

$$I : -C'(I)q = 1$$

$$q : p(q) + qp'(q) - C(I) = 0$$

La primera condición establece que la disminución marginal de costos totales ($C'(I)q$) debe igualar el costo de realizarla (en este caso 1), es decir se invertirá en reducción de costos hasta que el beneficio marginal de invertir sea igual al costo de la inversión marginal (1).

La segunda condición de primer orden es la clásica solución del monopolio: El costo marginal debe ser igual al ingreso marginal.

b) Un planificador social benevolente resolvería el siguiente problema (ver figura):

$$\max_{I, q} \int_0^q (p(x) - C(I))dx - I = \int_0^q p(x)dx - C(I)q - I$$

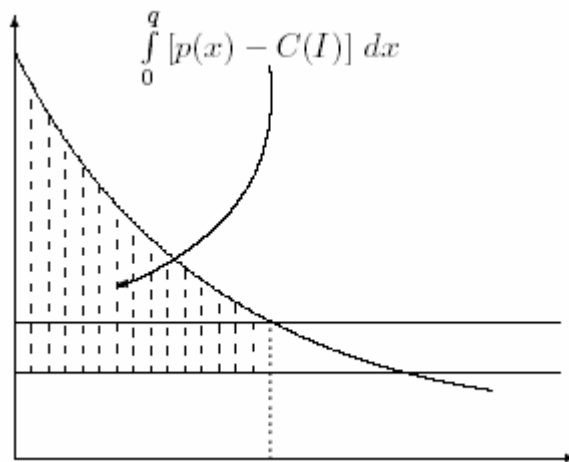
Las condiciones de primer orden son:

$$I : -C'(I)q = 1$$

$$q : p(q) - C(I) = 0$$

La primera condición es exactamente la misma que la que elige el monopolio. Este resultado no es demasiado sorprendente: un monopolio siempre trata de maximizar el tamaño de la “torta” antes de adueñársela. Sin embargo, dado que los niveles de producción son distintos, la inversión del monopolio será menor que la socialmente óptima.

La segunda condición de primer orden es el óptimo desde el punto de vista social: el precio debe igualar al costo marginal⁵.



c) En este caso, el monopolista resuelve

$$\max_q p(q)q - C(I)q - I$$

La condición de primer orden es:

$$p(q) + qp'(q) - C(I) = 0$$

Es decir, la condición de costo marginal igual a ingreso marginal. Llamando $q_m(I)$ a la solución del monopolio, el PSB resolverá:

$$\max_I \int_0^{q_m(I)} (p(x) - C(I)) dx - I$$

La condición de primer orden (que se complica algo ya que q_m es una función de I) es:

$$p(q_m)q'_m - C'q_m - Cq'_m - 1 = 0$$

⁵ Es bueno recordar que al planificador social no le importa el tema de la redistribución, aunque esta es muy importante a la hora de implementar la regulación. Por qué?: No pusimos ninguna restricción de financiamiento, por lo que el monopolio quebraría. Para solucionar este problema es necesario redistribuir riqueza desde los consumidores al monopolio.

Reordenando

$$-C' q_m = 1 - (p(q_m) - C)q'_m$$

Ahora bien, de la condición de primer orden del monopolio:

$$p(q_m)' q_m + p(q_m) = C$$

Diferenciando absolutamente con respecto a I , se obtiene:

$$p(q_m)'' q'_m q_m + p(q_m)' q'_m + p(q_m)' q'_m = C'$$

Luego:

$$q'_m = \frac{C'}{p(q_m)'' q_m + 2p(q_m)'}$$

Notando que $C' < 0$ tenemos que siempre que el ingreso del monopolio sea cóncavo en q_m (es decir $p''(q_m)q_m + 2p'(q_m) < 0$) entonces $-C'q_m < 1$ lo que implica que el PSB decide invertir más que en el caso monopolístico puro, para forzar al monopolio a producir más en el equilibrio. Sin embargo, esta inversión aún es menor que en el primer óptimo por cuanto el nivel de producción final es menor y la inversión es costosa.

Solución Problema 14

- a) Si el monopolio maximiza utilidades en cada período de manera independiente tenemos que:
- Primer período

$$\pi_1 = (a - q_1)q_1 \Rightarrow \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2q_1 = 0 \Leftrightarrow q_1 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow p_1 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \pi_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

- Segundo período

$$\pi_2 = (a - q_2 - bq_1)q_2 \Rightarrow \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2q_2 - bq_1 = 0 \Leftrightarrow q_2 = \frac{a - bq_1}{2} = \frac{a(2 - b)}{4} \Leftrightarrow p_1 = \frac{a}{4}(2 - b) \Leftrightarrow$$

$$\pi_2 = \left[\frac{a}{4}(2 - b)\right]^2$$

Por lo tanto las utilidades totales serán

$$\pi_{total} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left[\frac{a}{4}(2-b)\right]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{(2-b)^2}{4}\right]$$

b) En este caso al monopolio le interesa maximizar las utilidades de manera conjunta

$$\max_{q_1, q_2} \pi = (a - q_1)q_1 + (a - q_2 - bq_1)q_2$$

Las condiciones de primer orden son

$$q_1 : \frac{\partial \pi}{\partial q_1} = a - 2q_1 - bq_2 = 0$$

$$q_2 : \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = a - 2q_2 - bq_1 = 0$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, por lo que el sistema tiene solución⁶ y estas son:

$$q_1 = \frac{a}{2+b} \text{ y } q_2 = \frac{a}{2+b}$$

Reemplazando encontramos los precios

$$p_1 = \frac{a(1+b)}{2+b} \text{ y } p_2 = \frac{a}{2+b}$$

Las utilidades son $\pi = \frac{a^2}{2+b}$

c) Las utilidades serán mayores en el caso en que considera la externalidad que genera su propia producción, ya que esta será su competencia en el segundo período. Luego puede restringir la competencia disminuyendo la producción en 1.

En efecto

$$\begin{aligned} \pi_2 > \pi_1 &\Leftrightarrow \frac{a^2}{2+b} > \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{(2-b)^2}{4}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2+b} > \frac{1}{4} \left[1 + \frac{(2-b)^2}{4}\right] \\ &\Leftrightarrow 16 > (2+b)[4 + (2-b)^2] \Leftrightarrow 16 > 8 + 4b + (2-b)(4-b^2) \\ &\Leftrightarrow 8 > 4b + 8 - 2b^2 - 4b + b^3 \Leftrightarrow 0 > -2b^2 + b^3 \Leftrightarrow 0 > b^2(b-2) \\ &\Leftrightarrow 0 > b-2 \Leftrightarrow b < 2 \\ &\text{QED} \end{aligned}$$

⁶ En estricto rigor deberíamos también exigir que las ecuaciones sean linealmente independientes.

Y esta última condición se cumple porque $b < 1 \Rightarrow b - 2 < 0$. Es decir teníamos razón en nuestra intuición, las utilidades son mayores considerando la externalidad⁷.

- d) Este bien es duradero, lo que significa que puede ser revendido (por ejemplo un auto, un libro, etc). Las editoriales solucionan sacando nuevas ediciones continuamente, un claro ejemplo son los libros escolares que se “renuevan” (entre comillas porque no sabemos que tanto cambian los contenidos entre ediciones) cada muy pocos años, con lo que impiden que los libros antiguos sean competencia de los nuevos.

⁷ Esto se debe a que es una “autoexternalidad”.