



Clase Auxiliar 23/04/2004¹

Dudas y consultas a: Ignacio Llanos
illanos@ing.uchile.cl

Solución Problema N° 1

a)
$$U_B = w - e^2$$
$$U_M = w - 2e^2$$

Como existe información perfecta, podemos crear un contrato para cada tipo de trabajador de manera de maximizar la utilidad de la firma.

• **Contrato para trabajadores Buenos:**

Max $Ke_B - w_B$
sa. $w_B - e_B^2 \geq 0$

$$L = Ke_B - w_B + I (w_B - e_B^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_B} = -1 + I = 0 \Rightarrow I = 1 > 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_B} = K - 2Ie_B = 0 \Rightarrow e_B = \frac{K}{2}$$

$$\text{Como } I > 0, w_B = e_B^2 \Rightarrow w_B = \frac{K^2}{4}$$

• **Contrato para trabajadores Malos:**

Max $Ke_M - w_M$
sa. $w_M - 2e_M^2 \geq 0$

$$L = Ke_M - w_M + \lambda (w_M - 2e_M^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_M} = -1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 > 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_M} = K - 4\lambda e_M = 0 \Rightarrow e_M = \frac{K}{4}$$

$$\text{Como } \lambda > 0, w_M = 2e_M^2 \Rightarrow w_M = \frac{K^2}{8}$$

¹ Los 3 problemas son de la guía 1 (información asimétrica), disponible en U-cursos (Material docente → Guías).

$$\begin{aligned}
E(\Pi) &= q \left(\frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{4} \right) + (1-q) \left(\frac{K^2}{4} - \frac{K^2}{8} \right) \\
&= q \left(\frac{K^2}{4} \right) + (1-q) \left(\frac{K^2}{8} \right) \\
&= \frac{K^2}{8} (1+q)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\text{Max } q[Ke_B - w_B] + (1-q) q[Ke_M - w_M] \\
\text{sa. } &w_B - e_B^2 \geq 0 \quad (1) \\
&w_M - 2e_M^2 \geq 0 \quad (2) \\
&w_B - e_B^2 \geq w_M - e_M^2 \quad (3) \\
&w_M - 2e_M^2 \geq w_B - 2e_B^2 \quad (4)
\end{aligned}$$

Podemos notar primero que nada que $w_B - e_B^2 \geq w_M - e_M^2 \geq w_M - 2e_M^2 \geq 0$

Luego, restricción (1) se cumple satisfaciendo (2) y (3) y por lo tanto puede ser eliminada del problema de maximización.

Además, de (3) y (4) se tiene $e_B^2 - e_M^2 \leq w_B - w_M \leq 2(e_B^2 - e_M^2)$

$$\Rightarrow e_B^2 \geq e_M^2$$

$$\Rightarrow e_B \geq e_M$$

c)

$$\begin{aligned}
L &= q[Ke_B - w_B] + (1-q)[Ke_M - w_M] + \mathbf{l}(w_M - 2e_M^2) + \mathbf{m}(w_B - e_B^2 - w_M + e_M^2) \\
&\quad + \mathbf{d}(w_M - 2e_M^2 - w_B + 2e_B^2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_B} = -q + \mathbf{m} - \mathbf{d} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{m} - \mathbf{d} = q \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_M} = -(1-q) + \mathbf{l} - \mathbf{m} + \mathbf{d} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{l} - \mathbf{m} + \mathbf{d} = (1-q) \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_B} = qK - 2\mathbf{m}e_B + 4\mathbf{d}e_B = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{m} - 2\mathbf{d} = \frac{qK}{2e_B} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_M} = (1-q)K - 4\mathbf{l}e_M + 2\mathbf{m}e_M - 4\mathbf{d}e_M = 0$$

$$\Rightarrow 2\mathbf{l} - \mathbf{m} + 2\mathbf{d} = \frac{(1-q)K}{2e_M} \quad (8)$$

de (5) y (6)

$$\begin{aligned} \mathbf{m} - \mathbf{d} &= q \\ \mathbf{I} - \mathbf{m} + \mathbf{d} &= 1 - q \\ \mathbf{I} &= 1 > 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{m} > 0$, pues si $\mathbf{m} = 0$ entonces de (6) y/o (7) se tendrá $\mathbf{d} < 0$. lo cual no es posible.

Como $\mathbf{I} > 0$, $w_M - 2e_M^2 = 0$ (9)

$$\mathbf{m} > 0, w_B - e_B^2 = w_M - e_M^2 \quad (10)$$

Veamos ahora si la restricción (4) es activa:

$$w_M - 2e_M^2 - w_B + 2e_B^2 = (w_M - e_M^2 - w_B + e_B^2) - e_M^2 + e_B^2 = -e_M^2 + e_B^2 > 0$$

Por lo tanto $\mathbf{d} = 0$ pues la restricción no es activa.

$$\begin{aligned} \text{De (9)} \quad w_M &= 2e_M^2 \\ \text{De (9) y (10)} \quad w_B &= (2e_M^2) - e_M^2 + e_B^2 \\ w_B &= e_M^2 + e_B^2 \end{aligned}$$

$$\text{de (5)} \quad \mathbf{m} = q$$

$$\text{de (7)} \quad q = \frac{qK}{2e_B} \Rightarrow e_B = \frac{K}{2}$$

$$\text{de (8)} \quad 2 - q = \frac{(1-q)K}{2e_M} \Rightarrow e_M = \frac{(1-q)K}{2(2-q)}$$

$$\text{de (9)} \quad w_M = \frac{(1-q)^2 K^2}{2(2-q)^2}$$

$$\text{de (10)} \quad w_B = \frac{K^2}{4} + \frac{(1-q)^2 K^2}{4(2-q)^2}$$

$$\begin{aligned} E(\Pi) &= q \left[\frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{4} - \frac{(1-q)^2 K^2}{4(2-q)^2} \right] + (1-q) \left[\frac{(1-q)K^2}{2(2-q)} - \frac{(1-q)^2 K^2}{2(2-q)^2} \right] \\ &= q \left[\frac{K^2}{4} - \frac{(1-q)^2 K^2}{4(2-q)^2} \right] + (1-q) \frac{(1-q)K^2}{2(2-q)^2} [2-q-1+q] \\ &= q \left[\frac{K^2}{4} - \frac{(1-q)^2 K^2}{4(2-q)^2} \right] + (1-q) \frac{(1-q)K^2}{2(2-q)^2} \\ &= q \frac{K^2}{4} - \frac{q(1-q)^2 K^2}{4(2-q)^2} + \frac{(1-q)^2 K^2}{2(2-q)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= q \frac{K^2}{4} + \frac{(1-q)^2 K^2}{4(2-q)^2} [2-q] \\
 &= \frac{K^2}{4(2-q)} [2q - q^2 + 1 - 2q + q^2] \\
 &= \frac{K^2}{4(2-q)}
 \end{aligned}$$

$$E(\Pi)_{(a)} - E(\Pi)_{(c)} = \frac{K^2(1+q)}{8} - \frac{K^2}{4(2-q)} = \frac{K^2}{8} \left[\frac{2+q-q^2-2}{2-q} \right] = \frac{K^2}{8} \frac{q(1-q)}{(2-q)} \geq 0 \quad \forall q \in [0,1]$$

$$\Rightarrow E(\Pi)_{(a)} \geq E(\Pi)_{(c)}$$

d)

$$\begin{aligned} &\text{Max } q[Ke - w] \\ \text{sa. } &w - e^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$w - 2e^2 < 0 \quad (12)$$

$$L = q[Ke - w] + I(w - e^2) - m(w - 2e^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = -q + I - m = 0 \Rightarrow I - m = q \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial e} = qK - 2Ie + 4me = 0 \Rightarrow I - 2m = \frac{qK}{2e} \quad (14)$$

Si $I = 0$, entonces de (13) y/o (14) $m < 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto $I > 0$.

Si $I > 0$, entonces (11) es activa; luego $w = e^2$

Veremos ahora si (12) es activa:

$$w - 2e^2 = (e^2) - 2e^2 = -e^2 < 0$$

Por lo tanto (12) no es activa, $\Rightarrow m = 0$

$$\text{de(13)} \quad I = q$$

$$\text{de(14)} \quad q = \frac{qK}{2e} \Rightarrow e = \frac{K}{2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{K^2}{4}$$

$$\Rightarrow E(\Pi) = q \left[\frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{4} \right] = q \frac{K^2}{4}$$

$$\therefore E(\Pi)_{(a)} \geq E(\Pi)_{(d)}$$

$$E(\Pi)_{(c)} - E(\Pi)_{(d)} = \frac{K^2}{4(2-q)} - \frac{qK^2}{4} = \frac{K^2}{4} \left[\frac{1-2q+q^2}{2-q} \right] \geq 0 \quad \forall q \in [0,1]$$

$$\therefore E(\Pi)_{(c)} \geq E(\Pi)_{(d)}$$

Solución pregunta N°3

a)

El presidente de Urgentina desea contratar a un ministro de economía, y debe para ello encontrar los salarios w_e y w_f (en caso de éxito y fracaso respectivamente) que debe pagar, de tal manera que maximicen su utilidad, o lo que es lo mismo, que minimicen sus costos (dado que no se presenta la función de ingreso ni una función utilidad del presidente). Luego, la función objetivo del presidente de Urgentina estará dada por:

$$\text{Min } f(w_e, w_f) = (\text{Prob. de éxito } ^c/\text{economista serio})w_e + (\text{Prob. de fracaso } ^c/\text{economista serio})w_f$$

$$\text{Min } f(w_e, w_f) = 0.4w_e + 0.6w_f$$

Recordar que el presidente de Urgentina no es capaz de soportar el costo político de contratar a un charlatán, por lo tanto, el diseño del contrato (y por ende, la función objetivo) debe asumir que no se contratará ningún charlatán.

Además, el contrato debe ser tal que le convenga para un economista serio, por lo que el espacio de posibilidades debe estar sujeto a:

$$E(U_{e.\text{serio}}(w_e, w_f)) \geq U_{\min_{e.\text{serio}}}$$

$$(\text{Prob. de éxito } ^c/\text{economista serio})U(w_e) + (\text{Prob. fracaso } ^c/\text{economista serio})U(w_f) \geq 10$$

$$0.4\sqrt{w_e} + 0.6\sqrt{w_f} \geq 10$$

Análogamente, para lograr que el contrato sea inaceptable para charlatanes, debe imponerse que:

$$E(U_{\text{charlatán}}(w_e, w_f)) < U_{\min_{\text{charlatán}}}$$

$$(\text{Prob. éxito } ^c/\text{economista charlatán})U(w_e) + (\text{Prob. fracaso } ^c/\text{economista charlatán})U(w_f) < 1$$

$$0.04\sqrt{w_e} + 0.96\sqrt{w_f} < 1$$

Luego, tenemos el problema que debe resolver el presidente de Urgentina es:

$$\begin{aligned} &\text{Min } 0.4w_e + 0.6w_f \\ \text{s.a. } &0.4\sqrt{w_e} + 0.6\sqrt{w_f} \geq 10 \\ &0.04\sqrt{w_e} + 0.96\sqrt{w_f} < 1 \end{aligned}$$

b)

Planteamos el Lagrangiano correspondiente

$$L = (0.4w_e + 0.6w_f) + \lambda(-0.4\sqrt{w_e} - 0.6\sqrt{w_f} + 10) + \mu(0.04\sqrt{w_e} + 0.96\sqrt{w_f} - 1)$$

Para verificar que los multiplicadores asociados son positivos obtenemos las derivadas parciales.

$$\frac{\partial L}{\partial w_e} = 0.4 + I \left(-0.4 \frac{1}{2\sqrt{w_e}} \right) + m \left(0.04 \frac{1}{2\sqrt{w_e}} \right) = 0$$

$$\therefore 0.1I - 0.01m = 0.2\sqrt{w_e} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_f} = 0.6 + I \left(-0.6 \frac{1}{2\sqrt{w_f}} \right) + m \left(0.96 \frac{1}{2\sqrt{w_f}} \right) = 0$$

$$\therefore 0.1I - 0.16m = 0.2\sqrt{w_f} \quad (2)$$

Luego, de (1)-(2), obtenemos:

$$(0.1 - 0.1)I - (0.01 - 0.16)m = 0.2(\sqrt{w_e} - \sqrt{w_f})$$

$$0.15m = 0.2(\sqrt{w_e} - \sqrt{w_f})$$

$$\therefore m = \frac{4}{3}(\sqrt{w_e} - \sqrt{w_f})$$

Dado que esperamos que el ministro solucione los problemas de la economía, es lógico pagar más si es que resultado es exitoso, es decir, $w_e > w_f \Rightarrow m > 0$

De la ecuación (1), obtenemos

$$I = 2\sqrt{w_e} + 0.1m = 2\sqrt{w_e} + \frac{4}{3}(\sqrt{w_e} - \sqrt{w_f})$$

$$\Rightarrow I > 0$$

Luego, ambos multiplicadores son estrictamente positivos. Por lo tanto, las restricciones son activas.

c) Puesto que los multiplicadores son positivos, podemos imponer:

$$-0.4\sqrt{w_e} - 0.6\sqrt{w_f} + 10 = 0 \quad (3)$$

$$0.04\sqrt{w_e} + 0.96\sqrt{w_f} - 1 = 0 \quad (4)$$

Luego, de $10 \cdot (4) + (3)$, obtenemos:

$$(0.4 - 0.4)\sqrt{w_e} + (9.6 - 0.6)\sqrt{w_f} - (10 - 10) = 0$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{w_f} = 0$$

$$\therefore w_f = 0$$

De (4), se tiene:

$$0.04\sqrt{w_e} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{w_e} = 25$$

$$\therefore w_e = 625$$

d)

De lo anterior se tiene que :

$$\text{Costo del Contrato} = 0.4w_e + 0.6w_f = 250$$

Si se puede distinguir a simple vista cuál economista es serio y cuál un charlatán, entonces no necesitará definir 2 salarios diferentes para el caso de éxito y fracaso, pues la función de éstos es la de poder crear un contrato que pueda discriminar automáticamente a 2 (o más) tipos de empleados.

Realizando un desarrollo similar al anterior, podemos encontrar el costo del contrato y verificar lo anteriormente expuesto.

$$\text{Min } 0.4w_e + 0.6w_f$$

$$\text{s.a. } 0.4\sqrt{w_e} + 0.6\sqrt{w_f} \geq 10$$

$$L = (0.4w_e + 0.6w_f) + I(-0.4\sqrt{w_e} - 0.6\sqrt{w_f} + 10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_e} = 0.4 + I \left(-0.4 \frac{1}{2\sqrt{w_e}} \right) = 0$$
$$\Rightarrow I = 2\sqrt{w_e} \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_f} = 0.6 + I \left(-0.6 \frac{1}{2\sqrt{w_f}} \right) = 0$$
$$\Rightarrow I = 2\sqrt{w_f} \quad (6)$$
$$\therefore w_e = w_f = w$$

Dado que $I > 0$ entonces podemos imponer

$$0.4\sqrt{w} + 0.6\sqrt{w} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{w} = 10$$

$$\therefore w = 100$$

Costo del Contrato con discriminación a priori = $w = 100$

$$\frac{\text{Costo del Contrato}}{\text{Costo del Contrato con discriminación a priori}} = \frac{250}{100} = 2.5$$

Solución Problema N° 8

a)

Compatibilidad de incentivos: La utilidad esperada del agente (gerente) si se esfuerza, tiene que ser mayor o igual que la utilidad esperada del agente si no se esfuerza, es decir

$$\frac{2}{3}\left(10 - \frac{10}{w_a} - 2\right) + \frac{1}{3}\left(10 - \frac{10}{w_b} - 2\right) \geq \frac{1}{3}\left(10 - \frac{10}{w_a}\right) + \frac{2}{3}\left(10 - \frac{10}{w_b}\right)$$

Simplificando la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(-\frac{10}{w_a}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{w_b}\right) - 2 &\geq \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{w_a}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{10}{w_b}\right) \\ -2 &\geq \frac{10}{3w_a} - \frac{10}{3w_b} \end{aligned}$$

Restricción de participación: La utilidad esperada del agente (gerente) si se esfuerza, tiene que ser mayor o igual que la utilidad esperada de su trabaja alternativo, es decir

$$\frac{2}{3}\left(10 - \frac{10}{w_a} - 2\right) + \frac{1}{3}\left(10 - \frac{10}{w_b} - 2\right) \geq 10 - \frac{10}{1,25}$$

Simplificando la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(-\frac{10}{w_a}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{w_b}\right) - 2 &\geq -\frac{10}{1,25} \\ -\frac{20}{3w_a} - \frac{10}{3w_b} &\geq -6 \end{aligned}$$

b) En equilibrio ambas restricciones son activas, por lo que debemos solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-2 = \frac{10}{3w_a} - \frac{10}{3w_b}$$

$$-\frac{20}{3w_a} - \frac{10}{3w_b} = -6$$

Restando:

$$-2 + 6 = \frac{10}{3w_a} - \frac{10}{3w_b} + \frac{20}{3w_a} + \frac{10}{3w_b} \Leftrightarrow 4 = \frac{30}{3w_a} \Leftrightarrow w_a = \frac{5}{2}$$

Reemplazando en la primera ecuación tenemos que $w_b = 1$

c) Si la firma tiene éxito las utilidades serán $\mathbf{p}_e = 5 - w_a = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, en caso contrario

$\mathbf{p}_f = 1 - w_b = 0$. Luego la utilidad esperada es

$$E(\mathbf{p}) = p_e \mathbf{p}_e + p_f \mathbf{p}_f = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{5}{3}$$