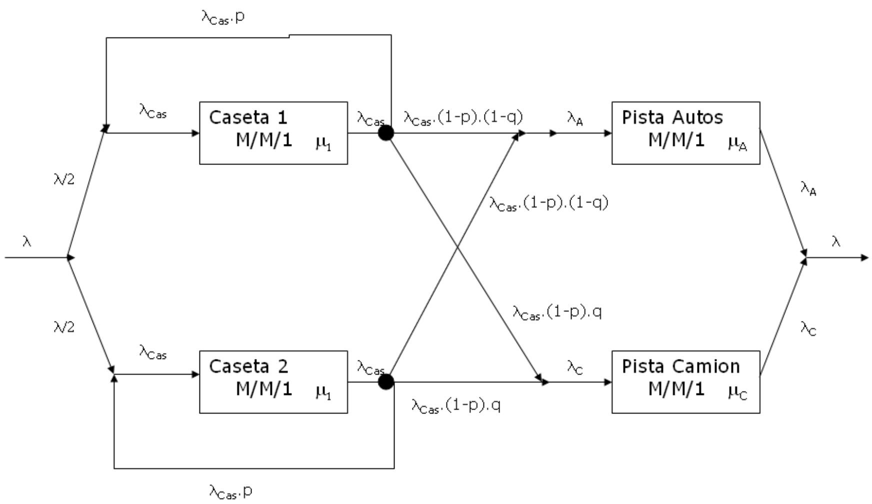
Clase Extra Redes de Colas

Problema 1

1. El sistema queda de la siguiente forma:



2. De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Casetas	λ_{Cas}	$\frac{\lambda}{2(1-p)}$
Autos	λ_A	$\lambda(1-q)$
Camiones	λ_C	λq

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Casetas	$\frac{\lambda_{Cas}}{\mu_1} < 1$
Autos	$\frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1$
Camiones	$\frac{\lambda_C}{\mu_C} < 1$

3. El número de camiones a la entrada de la pista de camiones es una cola M/M/1 con tasa de llegada λ_C y tasa de atención μ_C , luego utilizando el resultado conocido para colas de este tipo se tiene que:

$$\pi_k = \rho^k \cdot (1-\rho)$$

$$\pi_0 = (1-\rho)$$

$$\rho = \frac{\lambda_C}{\mu_C}$$

4. El número promedio de autos en la respectiva pista de obtiene utilizando L de una cola M/M/1:

$$L_A = \frac{\rho_A}{1-\rho_A}$$

donde :

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A}$$

5. Un auto dentro del sistema pasa por una de las casetas (que son iguales dada las tasas de atención y las tasas efectivas de entradas) y por la entrada de la pista de autos. Luego:

$$W_A = W_{Cas} + W_{pista}$$

Además se tiene que para un M/M/1 se tiene que:

$$W_{M/M/1} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Sin embargo el número de veces que un auto pasa por una caseta antes de ir a su respectiva pista, es una variables aleatoria de distribución geométrica de parámetro p. Recordando que la esperanza de una geométrica (p) es $\frac{1}{1-p}$ concluimos que:

$$W_{Cas} = \frac{1}{1-p} \cdot W_{M/M/1}$$

Entonces:

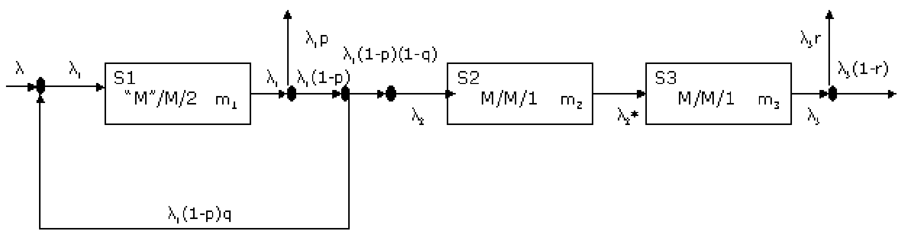
$$W_A = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_A - \lambda_A}$$

Análogamente para un camión:

$$W_C = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_C - \lambda_C}$$

Problema 2

1. El sistema se muestra en la figura .



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Sistema 1	λ_1	$\frac{\lambda}{1-(1-p)\cdot q}$
Sistema 2	λ_2	$\frac{\lambda\cdot(1-p)\cdot(1-q)}{1-(1-p)\cdot q}$
Sistema	λ_3	$\frac{\lambda\cdot(1-p)\cdot(1-q)}{1-(1-p)\cdot q} \cdot E(N)$

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Sistema 1	$\frac{\lambda_1}{2\cdot\mu_1} < 1$
Sistema 2	$\frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1$
Sistema 3	$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < 1$

Luego el número promedio de fruta que es separado para la devoución es : $\lambda_1 \cdot E(N) + \lambda_3 \cdot r$

2. El número promedio de cajas en los sistemas 1 y 2, corresponde al valor de L para colas M/M/2 y M/M/1 respectivamente, ie:

$$L_1 = \frac{2\rho_1}{1-\rho_1^2}$$
$$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

donde :

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1}$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

Del mismo modo para el Sistema 3, se tiene que :

$$L_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3}$$

donde

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$$

El tiempo de permamencia de una fruta dentro del sistema se debe calcular, tomando en cuenta todos los casos posibles dados por el reflujo existente en el Sistema 1, se obtiene:

$$W_{total} = \sum_{i=1}^{\inf} i \cdot W_1 \cdot (1-p)^{i-1} \cdot q^{i-1} \cdot p + \sum_{i=1}^{\inf} (i \cdot W_1 + W_2 + W_3) \cdot (1-p)^i \cdot q^{i-1} \cdot (1-q)$$

donde:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

Usando la fórmula de Little se tiene que :

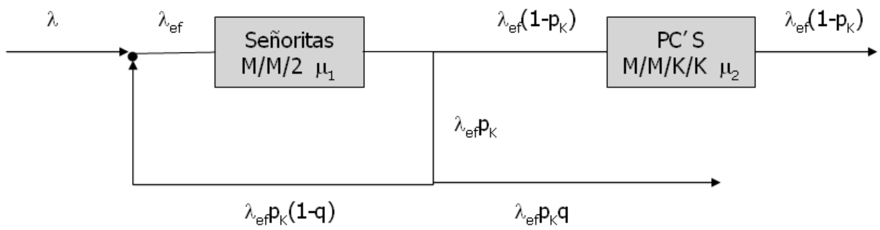
$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

3. Al mejorar los tiempos de atención podemos calcular un nuevo W^*_{total}. Luego la máxima disposición a pagar está dada por:

$$D = C(W^*_{total} - W_{total})$$

Problema 3

1. El sistema propuesto es el siguiente:



donde p_K es la probabilidad de que el segundo subsistema esté copado. La condición de régimen estacionario es $\lambda_{ef} < 2\mu_1$. Donde la tasa efectiva λ_{ef} es:

$$\lambda_{ef} = \frac{\lambda}{1 - p_K(1-q)}$$

En la situación actual, suponiendo que se cumple régimen estacionario se tiene que $\lambda < 2\mu_1$, pero ahora la tasa de entrada al subsistema de la señoritas es $\lambda_{ef} > \lambda$ por lo que puede que el sistema colapse.

Por otro lado las medidas propuestas son:

- Aumentar el número de señoritas: con esto el lado derecho de la condición de régimen estacionario se hace mayor por lo que se tiene mayor holgura para el crecimiento de la tasa de entrada.
- Aumentar el número de computadores: con esto disminuye p_K, y por lo tanto disminuye λ_{ef}.

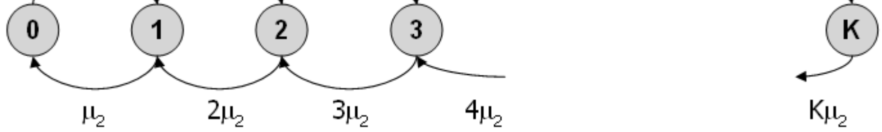
2. El problema a resolver es:

$$\begin{cases} \text{mín} & C_s S + C_c K \\ \text{s.a.} & \lambda_{ef} < S\mu_1 \end{cases}$$

3. Se busca que del total de personas que llega en un intervalo se retiren indignados menos del 30 %. Por ejemplo. en un intervalo de una hora:

$$\frac{\lambda_{ef} p_K q}{\lambda} \leq 0{,}3$$

donde p_K corresponde a la probabilidad estacionaria del estado K para el sistema M/M/K/K. Luego se tiene que:



Para esta cadena se tiene que:

$$\Pi_K = (\frac{\lambda_{ef}}{\mu_2})^K \frac{1}{K!}\Pi_0 \qquad \Pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{K}(\frac{\lambda_{ef}}{\mu_2})^k \frac{1}{k!}}$$

4. Para el subsistema de los computadores se tiene que:

$$W_C = \frac{1}{\mu_2} \qquad L_C = \lambda_{ef}(1-\Pi_K)\frac{1}{\mu_2}$$

Para el de las señoritas se tiene un sistema M/M/S, para el cual debemos calcular las probabilidades estacionarias (propuesto), y luego se tiene que:

$$L_S = \sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i \qquad W_S = \frac{L_S}{\lambda_{ef}}$$

Luego la cantidad total de personas en el sistema es $L_T = L_C + L_S$. Por otro lado el tiempo de permanencia lo podemos calcular por Little o usando los W's.

- Usando Little:

$$W_T = \frac{L_T}{\lambda}$$

- Usando los W's:

$$W_T = \sum_{i=1}^{\infty}(iW_S)\Pi_K^i(1-q)^{i-1}q + \sum_{i=1}^{\infty}(iW_S + W_C)(\Pi_K(1-q))^{i-1}(1-\Pi_K)$$

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl