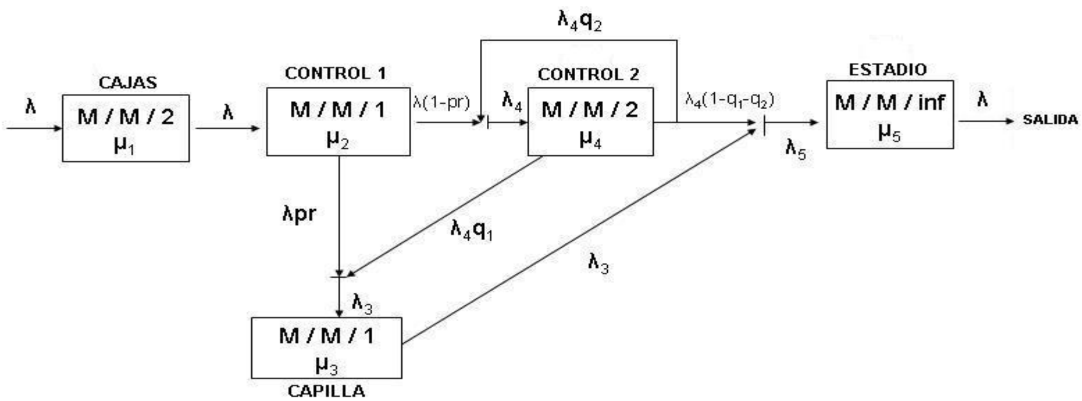
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut
Aux : C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución CTP 6
23 de Junio, 2004

1. El modelo es el siguiente:



Las tasas de entrada efectivas a cada subsistema son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Cajas	λ_1	λ
Control 1	λ_2	λ
Capilla	λ_3	$\lambda \cdot pr + \lambda \cdot (1 - pr) \cdot \frac{q_1}{1-q_2}$
Control 2	λ_4	$\frac{\lambda \cdot (1-pr)}{1-q_2}$
Estadio	λ_5	λ

2. Las condiciones de estado estacionario en cada subsistema son:

Sistema	Condición
Cajas	$\frac{\lambda_1}{2\mu_1} < 1$
Control 1	$\frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1$
Capilla	$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < 1$
Control 2	$\frac{\lambda_4}{2\mu_4} < 1$
Estadio	$\mu_5 > 0$

3. Se pide calcular el W_{total} en función de los W de cada subsistema. Para ello, debemos abarcar todas las trayectorias posibles de un hincha hasta que sale del Estadio:

$$W_{total} = W_1 + W_2 + pr \cdot W_3 + (1-pr) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot W_4 \cdot q_2^{i-1} \cdot (1-q_1-q_2) + (1-pr) \sum_{i=1}^{\infty} (i \cdot W_4 + W_3) \cdot q_2^{i-1} \cdot q_1 + W_5$$

donde los W_i corresponden al tiempo promedio de permanencia en los sistemas conocidos:

$$W_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{2 \cdot \rho_1}{1-\rho_1^2} \qquad W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} \qquad W_3 = \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3} \qquad W_4 = \frac{1}{\lambda_4} \cdot \frac{2 \cdot \rho_4}{1-\rho_4^2} \qquad W_5 = \frac{1}{\mu_5}$$

En la expresión para W_{total}, el cuarto término corresponde a los hinchas que llegan al Estadio provenientes directamente del subsistema 4, y el quinto término corresponde a los hinchas que llegan al Estadio provenientes del subsistema 3, pero que pasaron por el subsistema 4.

4. La fracción de hinchas azules que pasan por La Capilla será igual a λ_3 dividido en λ, esto es:

$$F_{capilla} = pr + (1-pr) \cdot \tfrac{q_1}{1-q_2}$$

5. En promedio, un total de λ hinchas pagan su entrada en una unidad de tiempo, mientras que $\lambda pr + \lambda_4 q_1$ pasan por Capilla.

   Con lo anterior e imponiendo la condicón de autofinanciamiento (utilidades mayor o igual que cero), se llega a:

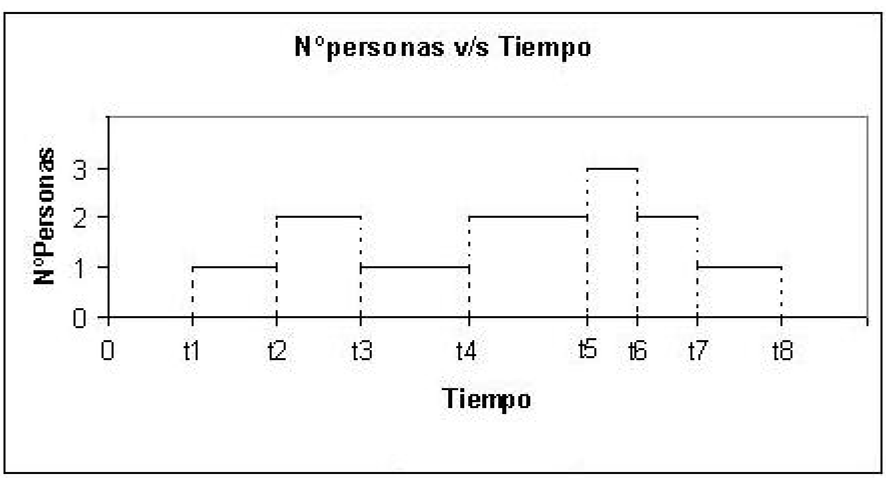
$$\lambda \cdot E - 2 \cdot C - 1 \cdot C - 2 \cdot S - 1 \cdot S - (\lambda pr + \lambda_4 q_1) \cdot K \geq 0$$

$$E_{min} = \frac{3(C+S) + K(\lambda pr + \lambda_4 q_1)}{\lambda}$$

   Nota: Si alguien consideró que los costos en los servidores se incurren sólo en la fracción de tiempo que están ocupados y, por lo tanto, ponderó el costo por $(1 - \pi_0)$, para efectos de corrección se considerará totalmente correcto.

6. En primer lugar, notemos que tanto el tiempo entre llegadas como el tiempo que un individuo permanece en el sistema son variables aleatorias continuas, por lo tanto, la probabilidad de que dos o más sucesos ocurran al mismo tiempo es cero. Luego, nos remitimos a analizar sólo el caso en que la desigualdad es estricta: $t_i < t_{i+1}, \forall i \in \{1, .., 7\}$

   El gráfico es el siguiente:



7. La fórmula de Little postula que $\lambda \cdot W = L$

Con los datos de problemas, el número promedio de personas en el sistema fue:

$$L = \frac{1 \cdot (t2 - t1) + 2 \cdot (t3 - t2) + 1 \cdot (t4 - t3) + 2 \cdot (t5 - t4) + 3 \cdot (t6 - t5) + 2 \cdot (t7 - t6) + 1 \cdot (t8 - t7)}{t8}$$

$$L = \frac{t8 + t7 + t6 - t5 - t4 + t3 - t2 - t1}{t8}$$

A su vez, el tiempo promedio que un individuo pasó en el sistema es:

$$W = \frac{(t3 - t1) + (t6 - t2) + (t7 - t4) + (t8 - t5)}{4}$$

Los numeradores de las fracciones anteriores corresponden al área bajo la trayectoria de la curva en el gráfico anterior, que obviamente son iguales, por lo tanto:

$$4 \cdot W = t8 \cdot L$$

$$\frac{4}{t8} \cdot W = L$$

Como suponemos que el intervalo de tiempo estudiado y las 4 llegadas regitradas describen bien el comportamiento promedio del sistema, es *razonable* aproximar $\frac{4}{t8} \sim \lambda$

Concluimos que se satsiface $\lambda \cdot W = L$

Dudas y/o Consultas:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl