



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut  
Aux : C.Berner, J.Guajardo, M.Guajardo, P.Hernández.

## CTP Recuperativo

### 23 de Junio, 2004

En un angosto y largo país, el torneo de fútbol profesional tiene como finalistas al equipo de *Los Azules* contra *Los Naranjas*. Para efectos de este problema, suponga que la final será a un solo partido, que durará indefinidamente.

Suponga que los hinchas azules llegan al Coloso de Ñuñoa según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ . A la entrada se ubican en una única cola en que atienden 2 cajeros durante un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_1}$ . Una vez que los asistentes han pasado por caja, se enfrentan al primer control del recinto, en que un único guardia revisa a cada hincha durante un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_2}$ . Suponga que una fracción  $p$  de los temidos hinchas azules es por naturaleza un anarquista infiltrado y que acude al estadio con serias intenciones de provocar disturbios. Independiente de todo lo demás, el guardia detecta a uno de estos infiltrados con probabilidad  $r$ , enviándolo directamente a *La Capilla*.

Todo individuo que es enviado a *La Capilla*, será purificado por un único espiritualista que durante un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_3}$  logra erradicar toda intención de disturbios del infiltrado, por lo cual definitivamente lo deja ingresar al estadio a presenciar al equipo de sus amores.

Por otro lado, todos los hinchas que pasan el control 1, deben enfrentar a uno de los dos policías que revisan en un segundo control durante un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro  $\mu_4$ . Suponga que desde este control, una fracción  $q_1$  de los hinchas es derivado a *La Capilla* a tratarse con el espiritualista y a una fracción  $q_2$ , dado que hay sospechas pero no son suficientes, se le obliga a ponerse nuevamente en la cola del control 2 (estas fracciones son independientes de si los hinchas son infiltrados o no). El resto, puede finalmente ingresar al estadio a presenciar la esperada final.

Por último, suponga que el estadio tiene capacidad ilimitada y que cada hincha permanecerá viendo el partido durante un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro  $\mu_5$  (se cansan de gritar goles de *Los Azules* y toman pacíficamente la única salida del estadio)...

1. (2.0 pts) Modele la situación anteriormente descrita como una red de colas, indicando el modelo que ocupará para cada sistema y los parámetros asociados. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema.
2. (0.5 pts) Escriba las condiciones para que exista estado estacionario.
3. (1.5 pts) Asuma conocidas las fórmulas para los **tiempos** esperados de permanencia en los sistemas clásicos vistos en el curso, pero que repentinamente, al igual que una distribución exponencial, usted ha “perdido memoria” y ha olvidado la fórmula de Little y, por lo tanto, **no puede** ocupar las fórmulas del **número de personas** promedio en esos sistemas. Calcule el tiempo promedio que un hincha pasa en todo el sistema en estado estacionario.
4. (1.0 pts) En promedio, ¿Qué fracción de los hinchas azules debe pasar por *La Capilla*?
5. (1.0 pts) Suponga que el administrador del estadio cobra una entrada de \$E, que cada servidor en caja y capilla cobra un sueldo de \$C por unidad de tiempo y que cada servidor en el control 1 y en el

control 2 significa un costo de \$\$ por unidad de tiempo. Además, todo aquel individuo que es derivado a capilla, significa un costo de \$K (por imagen y porque jamás volverán al estadio). ¿Cuál es el mínimo valor a cobrar por entrada para que en promedio el administrador autofinancie la operación del estadio? (suponga que todos los parámetros en el enunciado del problema están basados en una misma unidad de tiempo).

Un decidido alumno de este curso se ha dado el trabajo de estudiar el subsistema descrito para el control 1 del estadio. Él le entrega sus observaciones y usted lee lo siguiente:

“En  $t_1$  llegó el primer individuo; en  $t_2$  llegó el segundo; en  $t_3$  el primero que había llegado ya terminó de ser revisado por el guardia y abandona el control 1; en  $t_4$  llega un tercer hincha; en  $t_5$  llega un cuarto; en  $t_6$  el segundo que había llegado termina de ser revisado, mientras que el tercero y el cuarto abandonan el control en  $t_7$  y  $t_8$ , respectivamente.”

Suponga que  $t_i \leq t_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, 7\}$  y que el intervalo de tiempo  $[0, t_8]$  y las cuatro llegadas registradas son suficientes como para describir el comportamiento promedio del sistema.

Se pide lo siguiente:

6. **Bonus** (0.2 pts) Grafique el número de individuos en el control 1 v/s tiempo a partir de los datos proporcionados por el alumno.
7. **Bonus** (0.8 pts) Mediante algunos cálculos y una aproximación apropiada, muestre que la fórmula de Little es satisfecha por la toma de datos del alumno (a estas alturas del CTP, usted ha recordado esta fórmula, pero ya no puede volver a la pregunta 3...).

#### Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas series.  

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \text{ si } |a| < 1.$$
- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.

$M/M/1$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \Pi_0 = 1 - \rho \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$M/M/2$

$$W = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2} \quad \Pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \quad \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$$