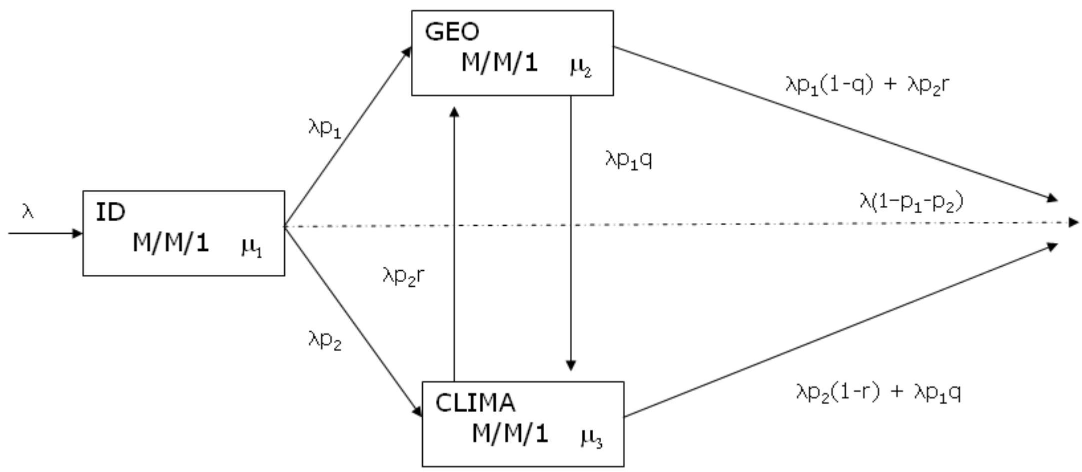
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 22 de Junio, 2004

Problema 1

1. El sistema de colas es el que se presenta a continuación:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
ID	λ_{ID}	λ
GEO	λ_{GEO}	$\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot r)$
CLIMA	λ_{CLIMA}	$\lambda \cdot (p_1 \cdot q + p_2)$

Las condiciones de estado estacionario son las siguientes:

Sistema	Condición
ID	$\lambda_{ID} \leq \mu_1$
GEO	$\lambda_{GEO} \leq \mu_2$
CLIMA	$\lambda_{CLIMA} \leq \mu_3$

2. Calculamos el número esperado de personas en el sistema como la suma del número esperado de personas en cada subsistema. Ocupando los resultados de la M/M/1:

$$\begin{aligned} L_{TOTAL} &= L_{ID} + L_{GEO} + L_{CLIMA} \\ &= \frac{\lambda_{ID}}{\lambda_{ID} + \mu_1} + \frac{\lambda_{GEO}}{\lambda_{GEO} + \mu_2} + \frac{\lambda_{CLIMA}}{\lambda_{CLIMA} + \mu_3} \end{aligned}$$

3. Para esto ocupamos Little:

$$W_{TOTAL} = \frac{L_{TOTAL}}{\lambda}$$

4. El costo por unidad de tiempo de la espera será el siguiente:

$$C_{ESPERA} = L_{TOTAL} \cdot C_W$$

El costo de atención será:

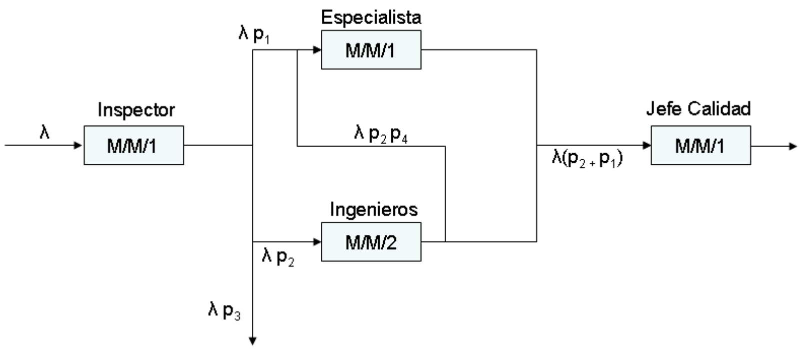
$$\begin{aligned} C_{ATENCION} &= (1-\pi_0^{ID}) \cdot C_1(\mu_1) + (1-\pi_0^{GEO}) \cdot C_2(\mu_2) + (1-\pi_0^{CLIMA}) \cdot C_3(\mu_3) \\ &= \frac{\lambda_{ID}}{\mu_1} \cdot C_1(\mu_1) + \frac{\lambda_{GEO}}{\mu_2} \cdot C_2(\mu_2) + \frac{\lambda_{CLIMA}}{\mu_3} \cdot C_3(\mu_3) \end{aligned}$$

Claramente tanto el costo de espera como el costo de atención presentan dependencias respecto a las tasas de atención dado que ellas condición los valores de las probabilidades estacionarias. De esta forma el problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$P = \min_{u_i > 0} \{C_{ESPERA}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) + C_{ATENCION}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\}$$

Problema 2

1. Sean $p_1 = 10\,\%$, $p_2 = 5\,\%$, $p_3 = 85\,\%$ y $p_4 = 20\,\%$, el sistema queda como sigue:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Expresión	Valor
Inspector	λ_{ins}	λ	λ
Especialista	λ_{esp}	$\lambda(p_1 + p_2 \cdot p_4)$	$0.11 \cdot\lambda$
Ingenieros	λ_{ing}	$\lambda \cdot p_2$	$0.05 \cdot\lambda$
Jefe Calidad	λ_{cal}	$\lambda \cdot (p_1 + p_2)$	$0.15 \cdot\lambda$

2. Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Inspector	$\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1} < 1$
Especialista	$\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2} < 1$
Ingenieros	$\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3} < 1$
Jefe Calidad	$\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4} < 1$

3. La fracción de productos que llegan al departamento y que son analizados por el especialista en fallas menores es :

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4)}{\lambda} = 11\,\%$$

4. En esta parte hay dos formas posibles de proceder:

Forma 1:
Calculando los largos promedios de cada uno de los subsistemas usando las expresiones conocidas, se obtiene:

Sistema	L_i	ρ_i
Inspector	$\frac{\rho_{ins}}{1-\rho_{ins}}$	$\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1}$
Especialista	$\frac{\rho_{esp}}{1-\rho_{esp}}$	$\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$
Ingenieros	$\frac{2\cdot\rho_{ing}}{1-\rho_{ing}^2}$	$\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3}$
Jefe Calidad	$\frac{\rho_{cal}}{1-\rho_{cal}}$	$\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4}$

Luego:

$$L_{total} = L_{ins} + L_{esp} + Ling + L_{cal}$$

Finalmente usando la frmula de Little, se obtiene:

$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

Forma 2:
Calculando los tiempos de permanencia promedio en cada subsistema como:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

donde λ_i representa la tasa efectiva de entrada al sistema i, el tiempo de permanencia en el sistema total se puede obtener de la siguiente forma:

$$W_{total} = W_{ins} + W_{esp} \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4) + W_{ing} \cdot p_2 + W_{cal} \cdot (p_1 + p_2)$$

5. Bajo estas condiciones el subsistema del Inspector se transforma de una cola M/M/1 a una M/M/1/50. Con esto las salidas de esta sistema y por lo tanto la entrada a los subsiguientes deja de ser poissoniana y el sistema no se podría estudiar con los modelos estudiados, a no ser que las tasas de entrada y atención sean tales que nunca se alcance la capacidad máxima del sistema.

6. Si se agrega un número ilimitado de especialistas ese susbistema de transforma en una cola M/M/∞, en la cual el número de productos en el sistema tiene una distribución de Poisson de media $L = \frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$. El tiempo promedio que permanece un producto en en este subsistema es $\frac{1}{\mu_2}$, ya que al existir capacidad ilimitada en la atención no se forma cola y el tiempo en el sistema es igual al tiempo de atención.

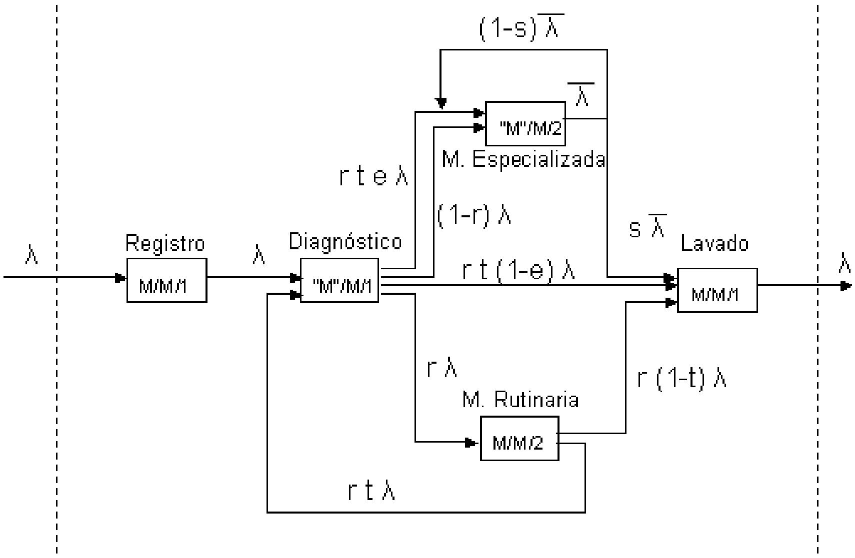
   Con lo anterior es posible calcular un nuevo W_{total_2} de las mismas dos formas posibles mostradas en la parte 4 y se puede cuantificar la disminución del tiempo en el sistema como :

$$\delta = W_{total} - W_{total_2}$$

   donde W_{total} es el calculado en la parte 4.

Problema 3

a) El sistema queda de la siguiente forma:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Registro	λ_{Reg}	λ
Diagnóstico	λ_{Diag}	$\lambda + \lambda rt$
M. Especializada	λ_{Esp}	$\frac{\lambda \cdot (er+(1-r))}{s}$
M. Rutinaria	λ_{Rut}	$r\lambda$
Salida	λ_{Sal}	λ

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Registro	$\frac{\lambda_{Reg}}{\mu_1} < 1$
Diagnóstico	$\frac{\lambda_{Diag}}{\mu_2} < 1$
M. Especializada	$\frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3} < 1$
M. Rutinaria	$\frac{\lambda_{Rut}}{2\mu_4} < 1$
Salida	$\frac{\lambda_{Sal}}{\mu_5} < 1$

b) Procedemos como siempre:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda rte}{\lambda rte + (1-r)\lambda}$$

c) Para esta parte utilizamos las formulas de los sistemas de colas clásicos y la formula de Little. De esta forma, dado que se conoce completamente la trayectoria que seguirá el auto, se puede ver que:

$$E(\text{Tiempo}) = E(\text{T Registro}) + E(\text{T Diagnóstico}) + E(\text{T especialista}) + E(\text{T Salida})$$

Utilizando los resultados elementales la expresión queda:

$$E(\text{Tiempo}) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda_{Diag}} + E(\text{T especialista}) + \frac{1}{\mu_3 - \lambda_{Sal}}$$

Por otro lado se puede calcular el tiempo en el subsistema de Especialistas condicionando sobre N= Número de veces que se reingresa al sistema de especialistas. De esta forma:

$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{Esp} \cdot k \cdot (1-s)^{k-1} \cdot s = \frac{1}{s} W_{Esp}$$

donde : $W_{Esp} = \frac{2\rho_{Esp}}{\lambda_{Esp}(1-\rho^2)}$ con $\rho_{Esp} = \frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3}$

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl