DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 16 de Junio, 2004

Problema 1

Armijo Catalán es el dueño de una concesionaria de automóviles de última generación, en cuyas dependencias caben a lo más C unidades de estos bólidos. En esta ocasión Armijo centrará su atención en la política de mantención del inventario, y no en los precios que cobrará.

Tras noches de insomnio, Armijo determino la siguiente política: cada vez que realice una venta, ordenará a su proveedor un nuevo automóvil. Dicho proveedor cada vez que recibe un pedido inmediatamente selecciona a uno de sus múltiples empleados para que conduzca el auto hasta la concesionaria. Independiente del conductor el tiempo de viaje entre la bodega del proveedor y el local de Armijo se comporta como una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\alpha}$[horas]

Por otro lado la llegada de clientes a la concesionaria se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa β[Clientes/hora]. No todos los clientes compran, sino que la probabilidad de compra de un cliente esta directamente relacionada con la cantidad de automóviles presentes en el local. Sea p_i la probabilidad de compra cuando hay i autos en la concesionaria.

Suponga que inicialmente se cuenta con C autos en la concesionaria. Al respecto responda las siguientes preguntas:

1. Si en un instante hay k empleados manejando cada uno un automóvil hacia el local de Armijo, ¿como se distribuye el tiempo hasta que el primero de ellos llega a su destino?
2. Mientras haya i autos en la concesionaria, ¿como se distribuye el tiempo hasta que se vende el próximo automóvil?
3. Utilizando las partes anteriores modele el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo
4. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y escriba el sistema de ecuaciones que permitoría calcularlas.
5. Encuentre expresiones para la tasa efectiva de venta de automóviles y para la tasa efectiva de llegada de automóviles.
6. Suponiendo que Armijo entrega una pequeña propina de $\$X$ a cada conductor que llega hasta su local, ¿Cual es el costo esperado por unidad de tiempo de la entrega de propinas?

Problema 2

DonKingTicket, empresa encargada de la venta de entradas para el concierto de despedida de Pepe y los Markovianos, lo ha contratado a ud. para estudiar el actual sistema de venta de boletos.

Don King ha dispuesto de un único lugar para la venta, el cual cuenta con 2 servidores con colas independientes. La atención de cada uno de ellos, es una variable aleatoria de distribucióon exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ [horas].Los fanáticos llegan al local de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. Si en el momento que arriba un cliente la cantidad de personas en el sistema es igual a k, éste decide entrar con probabilidad q_k y en caso contrario se retira resignado a ver el evento por las pantallas de TBM. Cuando una persona decide ingresar, siempre elige la cola más corta y ante empates en el largo de las colas eligen equiprobablemente.

Una vez en el sistema, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que entra al local hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $\frac{1}{\beta}$[horas]. Consciente de lo anterior Don King ha dispuesto una pantalla gigante en la cual se revisan momentos históricos de la conocida banda. Dado lo anterior, una persona que está esperando en la cola y se agota su paciencia, con probabilidad p decidirá irse y en caso contrario renovará sus intenciones de seguir esperando.

Además los clientes que se encuentran al final de cada fila, se cambian instantáneamente a la cola del otro servidor si es que al cambiarse la cantidad de personas que quedan delante de él, es menor al de la cola en que se encuentra actualmente.

1. (2,5 ptos.) Modele el número de personas en cada subsistema, incluyendo los clientes en atención, como una cadena de Markov en tiempo continuo. No es necesario que dibuje toda la cadena, sino que puede indicar las transiciones para estados genéricos.¿Cuál es la condición de régimen estacionario?
2. (2,0 ptos.) Modele la CANTIDAD TOTAL de personas en el sistema como un proceso de Nacimiento y Muerte. ¿Cuál es la condición de régimen estacionario?
3. Suponiendo que se alcanza régimen estacionario en las dos cadenas anteriores y que ud. conoce las probabilidades estacionarias para cada una de ellas.
   a) (0,5 ptos.) En función de las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 1 ¿Cuál es la tasa efectiva de entrada de fanáticos al sistema ?
   b) (0,5 ptos.) En función de las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 2 ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema tanto por atención como por aburrimiento?.
   c) (0,5 ptos.) Sin realizar cálculos adicionales indique qué relación existe con la tasa calculada en la parte a?. Justifique.

Problema 3

1. Considere un sistema M/M/1 con proceso de llegada de tasa λ y tiempos de atención con distribución exponencial de parámetro μ.
   a) (0,2 ptos.) ¿Cuál es la *condición de estacionariedad* de este sistema?
   b) (0,8 ptos.) Asumiendo que el sistema cumple la condición de estacionariedad calcule las probabilidades estacionarias para el sistema en función de λ y μ.
   c) (1,0 pto.) Calcule el número promedio de entidades en el sistema y el tiempo esperado que pasa una entidad en el sistema, en estado estacionario.
2. Considere un sistema de atención con de dos servidores en *serie* (ver Figura). Los tiempos de atención se distribuyen exponencialmante en ambos servidores y las distribuciones de estos tiempos tienen parámetro μ_1, para el primer servidor y μ_2, para el segundo servidor. El proceso de llegada al sistema es un proceso de Poisson de tasa λ.
   a) (1,0 pto.) Modele el número de personas en el sistema como una cadena de Markov en tiempo contínuo cuyos estados están definidos por el número de entidades en cada subsistema (servidor más cola de espera para ese servidor). Justifique por qué el sistema puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo contínuo.
   b) (1,0 pto.) Proponga un sistema de ecuaciones que permitiría obtener las probabilidades estacionarias del sistema, en caso que éstas existan.
3. (1,0 pto.) Considere un sistema de tres servidores en *serie*: los dos primeros, con tiempos de atención distribuídos exponencialmente con tasas μ_1 y μ_2, respectivamente. El tercer servidor tiene tiempos de atención distribuídos uniformemente en $[0, 2\tau]$ (ver Figura). El proceso de llegada al sistema es un proceso de Poisson de tasa λ. Responda: ¿Cuál es el número promedio de entidades en el sistema en estado estacionario?

Indicaciones Generales y Fórmulas

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

- Algunas distribuciones

$$X \rightsquigarrow \mathrm{EXP}(\lambda): \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \ \forall\, x \geq 0\,, \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}\,, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Poisson}(\lambda): \quad \Pr[X = k] \ = \ \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\,, \qquad E(X) = \lambda\,, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

$$X \rightsquigarrow \mathrm{U}(a,b): \quad f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2}\,,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Algunas colas

Sistemas M/M/1

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}\,, \qquad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{\mu}\,.$$

Sistemas M/M/2

$$L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}\,, \qquad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{2\mu}\,.$$

Sistemas M/G/1, con tasa de llegada λ

$$W_q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}.$$

- Algunas series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}\,, \text{ si } |a| < 1.$$