DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

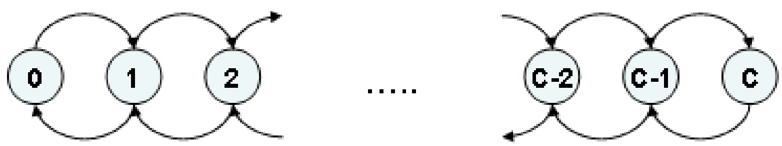
Clase Auxiliar 15 de Junio, 2004

Problema 1

1. El tiempo que demora cada uno de los k empleados en llegar al local se distribuye exponencial de tasa α. El tiempo del primero de estos que llega sigue la distribución del mínimo de k exponenciales de tasa α. Sabemos que esta distribución es exponencial de tasa $k \cdot \alpha$.

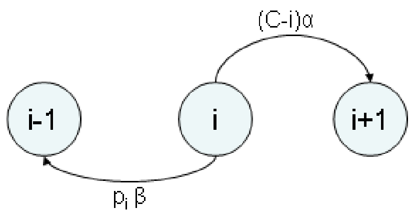
2. Mientras haya i autos en la concesionaria la probabilidad de compra de un cliente será p_i. Utilizando división de procesos de Poisson vemos que el proceso de compra de autos es Poisson de tasa $\beta \cdot p_i$. Entonces el tiempo entre compras se distribuye exponencial de tasa $\beta \cdot p_i$.

3. Modelamos los estados como el número de automóviles en el local. La cadena queda de la siguiente forma:



Vemos que la cadena tiene la estructura de un proceso de nacimiento y muerte.

Para definir la cadena completamente debemos especificar las tasas de transición entre estados. Cuando hay i autos en la concesionaria habrán $C - i$ empleados conduciendo automóviles al local. por lo tanto la tasa de transición al estado $i + 1$ será $(C - i) \cdot \alpha$. En la misma situación la tasa de compra será $\beta \cdot p_i$ (parte 2). Con esto las tasa quedan de la siguiente forma.



En la figura anterior debemos obviar las transiciones desde C a $C + 1$ y desde 0 a -1 (no existen).

4. La cadena es irreducible y finita. Condición suficiente.

Para calcular las probabilidades estacionarias utilizamos las formulas de procesos de nacimiento y muerte.

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(C - j) \cdot \alpha}{\prod_{j=1}^{i} p_j \cdot \beta} \cdot \pi_0$$

$$\sum_{i=0}^{C} \pi_i = 1$$

5. Supondremos conocidas las probabilidades estacionarias.

   En este caso la tasa efectiva de entrada de autos al sistema es (en el largo plazo):

$$\lambda = \sum_{i=0}^{C} (C - i) \cdot \alpha \cdot \pi_i$$

   La tasa efectiva de salida de autos del sistema es:

$$\mu = \sum_{i=1}^{C} p_i \cdot \beta \cdot \pi_i$$

6. Mientras nos encontramos en el estado i los empleados llegan a la tienda con tasa $(C - i) \cdot \alpha$ por lo que el costo esperado por unidad de tiempo es simplemente:

$$(C - i) \cdot \alpha \cdot X$$

   Ahora si ajustamos este costo considerando que no me encuentro todo la unidad de tiempo en un estado, sino que solo estoy una fracción π_i (en términos esperados, en el largo plazo), tendremos que:

$$E[\text{Costo}] = \sum_{i=0}^{C} (C - i) \cdot \alpha \cdot X \cdot \pi_i = \lambda \cdot X$$

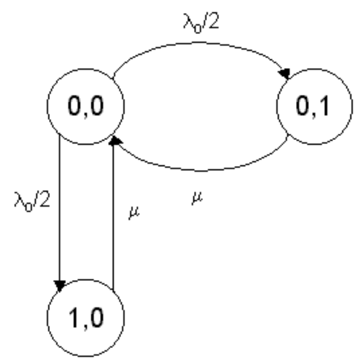
Problema 2

Para simplificar la notación, definimos $\lambda_k = \lambda \cdot q_k$

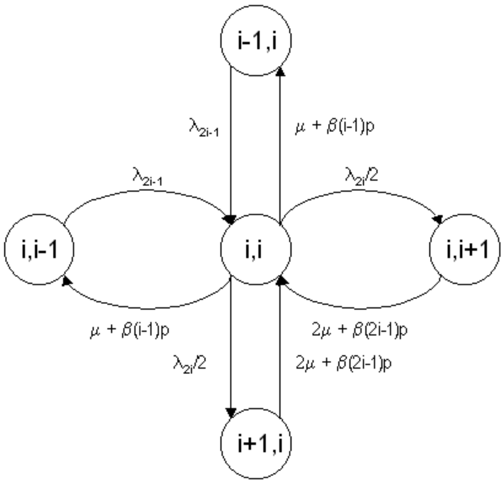
a) A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.

   Para modelar el sistema descrito usando pares ordenados como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 2 casos:

   Caso 1:



   Caso 2: $i > 0$.

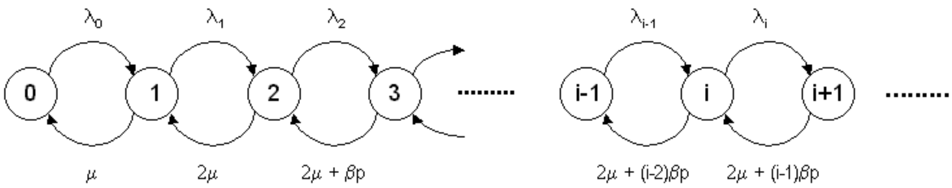


Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico (i,i) con $i > 0$.
La condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

$$\lambda_i \leq (2\mu + 2\beta(i-1)p)$$

Observando la espresión anterior nos damos cuenta de que la tasa de entrada está acotada por λ, mientras que la tasa de salida es creciente con el número de personas en el sistema por lo que **SIEMPRE** existen probabilidades estacionarias.

b) El proceso de Nacimineto y Muerte queda como sigue:



Dado que la situación modelada es la misma que en la parte 1 el argumento para la existencia de probabilidades estacionarias es la misma, es decir, **SIEMPRE** existen probabilidades estacionarias.

c) 1) La tasa efectiva de entrada para la primera cadena está dado por:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i,j \geq 0/|i-j| \leq 1} \pi_{i,j} \lambda_{i+j}$$

2) La tasa efectiva de salida para la segunda cadena está dado por:

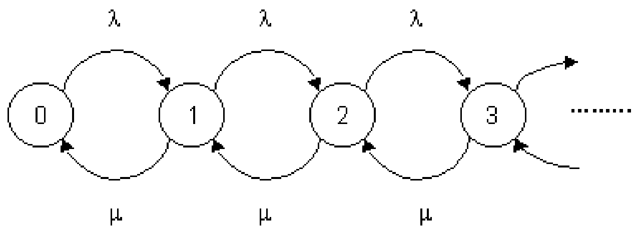
$$\bar{\mu} = \pi_1 \mu + \sum_{i \geq 2} \pi_i (2\mu + (i-2)\beta p)$$

3) Dado que existe régimen estacionario y ambas cadenas representan la misma situación la tasa efectiva de entrada es igual a la tasa efectiva de salida.

Problema 3

a) 1) La condición de estacionariedad de este sistema es $\lambda < \mu$ (o bien, $\rho < 1$ si se define $\rho = \lambda/\mu$).

2) El sistema queda como sigue:



Y las ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias, se calculan como sigue:

$$\pi_i = \prod_{l=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda_l}{\mu_{l+1}} \right) \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0 = \rho^i \pi_0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1\,. \tag{2}$$

Sustituyendo en (2), según (1) tenemos que

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \pi_0 = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \pi_0 \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

y por lo tanto

$$\pi_i = \rho^i (1-\rho)\,, \text{ para } i \geq 0\,.$$

3) Para calcular el número promedio de entidades en el sistema (L) , se tiene que:

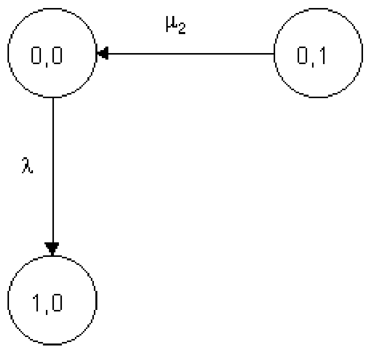
$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)}\,.$$

Para calcular el tiempo esperado que pasa una entidad en el sistema, en estado estacionario, aplicamos Little:

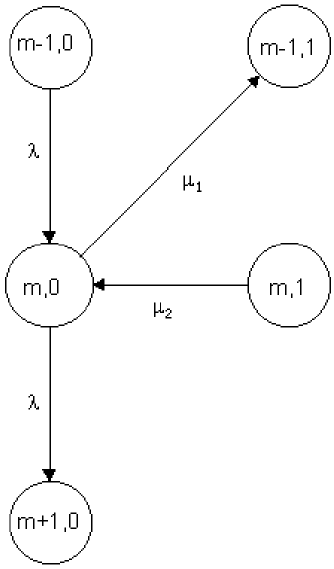
$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{(1-\rho)}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu - \lambda}\,.$$

b) 1) La cadena de Markov que resulta tiene estados que se pueden clasificar en cuatro grupos.

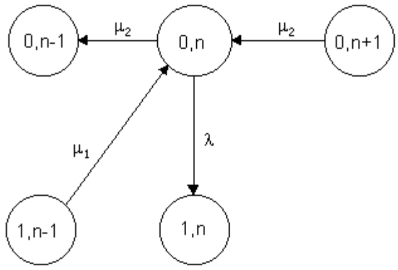
a' Caso $(0,0)$:



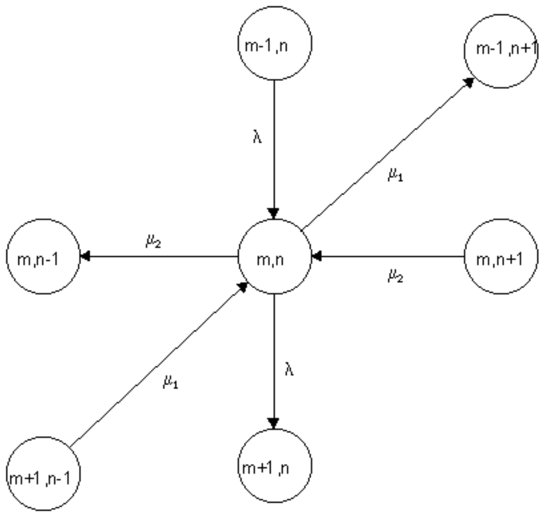
b' Caso $(m,0)$, $m \neq 0$:


m-1,0
m-1,1
λ
μ1
m,0
m,1
μ2
λ
m+1,0

c' Caso $(0, n)$, $n \neq 0$:



d' Caso (m, n), $m, n \neq 0$:



El sistema se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo continuo ya que:

- los tiempos de permanencia en cada estado se distribuyen exponencialmente;
- las tasas de transición sólo dependen del estado actual y del estado al que se va.

2) Denotando por $\pi_{m,n}$ la probabilidad estacionaria asociada al estado (m, n), $m, n \geq 0$ las ecuaciones que deben satisfacerse son:

a' Caso $(0, 0)$:

$$\lambda\pi_{0,0} = \mu_2\pi_{0,1} \, ,$$

b' Caso $(m, 0)$, $m \neq 0$:

$$(\lambda + \mu_1)\pi_{m,0} = \lambda\pi_{m-1,0} + \mu_2\pi_{m,1} \, ,$$

c' Caso $(0, n)$, $n \neq 0$:

$$(\lambda + \mu_2)\pi_{0,n} = \mu_1\pi_{1,n-1} + \mu_2\pi_{0,n+1} \, ,$$

d' Caso (m, n), $m, n \neq 0$:

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi_{m,n} = \lambda\pi_{m-1,n} + \mu_1\pi_{m+1,n-1} + \mu_2\pi_{m,n+1} \, ,$$

e' Sumatoria igual a UNO:

$$\sum_{m,n\geq 0} \pi_{m,n} = 1 \, .$$

$c)$ Para calcular el número promedio de personas en el sistema completo, lo dividimos en partes:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \, ,$$

donde L_j es el número promedio de personas en el subsistema correspondiente al j-ésimo servidor ($j = 1, 2, 3$).

1) Los subsistemas correspondientes al primer y segundo servidor son colas $M/M/1$, por lo tanto, para $j = 1, 2$ se tiene que:

$$L_j = \frac{\rho_j}{1-\rho_j}, \quad \text{donde } \rho_j = \frac{\lambda}{\mu_j}.$$

2) Para el tercer servidor, calculamos $W_3 = W_q + W_s$ y después aplicamos Little.

- W_q: El subsistema que tenemos es una cola $M/G/1$ (por el Teorema de Burke, el proceso de entrada al tercer servidor es un proceso de Poisson de tasa λ), por lo tanto

$$W_q = \frac{\lambda[S^2]}{2(1-\lambda[S])} = \frac{\lambda \cdot (4/3)\tau^2}{2(1-\lambda\tau)} = \frac{2\lambda\tau^2}{3(1-\lambda\tau)},$$

donde S a la variable aleatoria que representa al tiempo de servicio.
Observación. Para este cálculo fue necesario calcular $[S^2]$. Puede ser obtenido, a partir de la varianza de la siguiente manera:

$$\frac{\tau^2}{3} = \frac{(2\tau)^2}{12} = \mathrm{Var}(S) = [S^2] - ([S])^2 = [S^2] - \tau^2$$

y por lo tanto $[S^2] = (4/3)\tau^2$.

- W_s: El tiempo medio de servicio es simplemente la media de una variable aleatoria $U(0, 2\tau)$, es decir: $W_s = \tau$.
- L_3: De los resultados anteriores concluimos que

$$W_3 = W_q + W_s = \frac{2\lambda\tau^2}{3(1-\lambda\tau)} + \tau$$

y por lo tanto (por Little)

$$L_3 = \lambda W_3 = \lambda\left(\frac{2\lambda\tau^2}{3(1-\lambda\tau)} + \tau\right).$$

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl