



Clase Auxiliar 15 de Junio, 2004

## Problema 1

Un ex-subsecretario de transportes de un país muy lejano, llamado Tom Bollinery, es el encargado de recibir propuestas para una licitación de Plantas de Revisión Técnica en una ciudad al sur del país, llamada Ar-rankawua. Sobre su escritorio caben un número indeterminado de sobres con propuestas, los que llegan según un proceso de poisson de tasa  $\lambda$  propuestas por hora. Sin embargo la licitación está arreglada de antemano, la cual previo pago de algunas comisiones será ganada por un amigo de Tom Bollinery, por lo que el ex-subsecretario ni siquiera mira las propuestas que le llegan, sino que simplemente a intervalos de tiempo exponencialmente distribuidos de tasa  $\mu$ , toma todos los sobres que encuentre sobre su escritorio y los bota a la basura.

1. Modele la cantidad de sobres con propuestas, sobre la mesa del subsecretario Bollinery como una Cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario.
2. ¿Cuánto tiempo estará una propuesta sobre el escritorio del subsecretario?. ¿Cuál es el promedio de propuestas en el escritorio del subsecretario en el largo plazo?.

Considere que como era de esperar la licitación fue adjudicada al amigo de Tom Bollinery, el cual lo ha contratado a ud. para estudiar el sistema de espera de la Planta de Revisión Técnica. La planta consta de dos estaciones idénticas, que funcionan en paralelo que pueden ser modeladas como colas M/M/1/3. Esto es las llegadas son según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  autos por hora, las atenciones son exponenciales de media  $\frac{1}{\mu}$  horas, y la capacidad de cada estación es de 3 autos incluyendo al que se está sirviendo. Cuando un cliente llega se ubica en la estación que tenga menos autos y frente a empates, SIEMPRE prefieren la estación 1. Además los clientes que se encuentran al *final de cada fila*, se cambian instantáneamente a la cola de la otra estación si es que al cambiarse el número de autos que quedan delante de él es menor que el actual.

3. Modele el estado de ocupación de cada estación de la Planta de Revisión Técnica en una única Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Encuentre la condición sobre las tasas para que exista régimen estacionario.
4. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, entregue expresiones para :
  - a) La fracción de clientes que en una hora no pueden ingresar al sistema porque no hay capacidad disponible.
  - b) El número promedio de autos esperando por atención en toda la Planta.
  - c) El tiempo promedio de espera en cola de una auto que logra ingresar a la planta.

## Problema 2

El meson de atención en el aeropuerto de la aerolínea ARMIJO-AIR funciona de la siguiente manera: existen 2 tipos de clientes, los de primera clase (tipo 1) y los de clase económica (tipo 2). El proceso de llegada de los clientes es Poisson de tasa  $\lambda$ [clientes/hora]. Un cliente que llega al meson, independiente de todo lo demás, con probabilidad  $p$  es tipo 1 y con probabilidad  $(1 - p)$  es tipo 2.

La política de la empresa es siempre dar prioridad a los clientes tipo 1 en la atención, es decir, si un cliente tipo 1 llega al meson y encuentra a un cliente tipo 2 atendiendo, el cliente tipo 2 debe cederle el servidor

al tipo 1 que llega. Solo se atienden clientes tipo 2 cuando no hay clientes tipo 1 presentes. Existe un solo servidor con tiempo de atención exponencial de tasa  $\mu$  independiente del tipo de cliente.

1. Modele la situación anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo y justifique porque puede hacerlo. Generaliza estados si corresponde.
2. Escriba las ecuaciones de estado estacionario. Generalice si corresponde.
3. Determine el tiempo promedio que pasa un cliente tipo 1 en el meson de atención.
4. Determine el tiempo promedio que pasa un cliente tipo 2 en el meson de atención (espera + atención) y compárelo con el de los tipo 1.

### Problema 3

Don King, nuevamente requiere de nuestra ayuda para estudiar el sistema de atención de una de sus sucursales bancarias.

El banco cuenta con  $C$  cajas en paralelo y opera con una cola única de capacidad ilimitada. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [clientes/hora]. Si al llegar una persona al banco, hay  $j$  clientes en la fila, entra al sistema con probabilidad  $p_j$ , y en caso contrario, se va ( $P_0=1$ ).

Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media  $\frac{1}{\mu}$  [horas].

Además se sabe que cada la atención de cada uno de los cajeros, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$  [horas].

1. Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y entregue expresiones genéricas que le permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguiente preguntas:
  - a) ¿Qué fracción de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no ponerse en la cola y retirarse sin entrar al banco?
  - b) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?

Ahora suponga que la capacidad para personas en cola de igual a  $R$  (Asuma  $p_R=0$ ). En el momento que el sistema se llena, Don Güilly, guardia del local, ágilmente se sube a un improvisado escenario dispuesto en el hall del banco, ha realizar una atrevidad performance.

Según Don King, cuando el guardia est actuando, inhibe cualquier señal de aburrimineto por parte de los clientes. Don Güilly mantiene su show, mientras existan personas en cola.

Modele esta nueva situación como una Cadena de Markov en tiempo continuo.