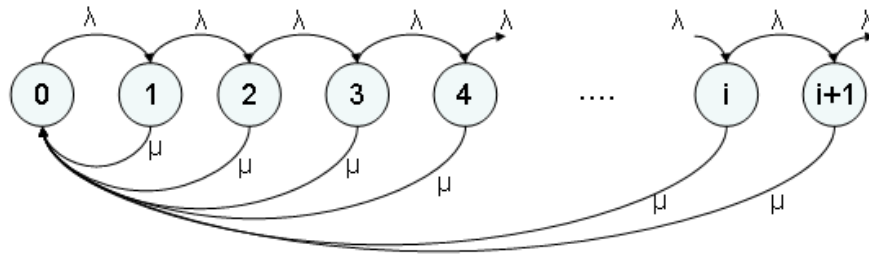




Clase Auxiliar 15 de Junio, 2004

## Problema 1

- Definiendo los estados como el número de ofertas que tiene Tom Bollinery sobre su escritorio en un instante cualquiera, la cadena queda como sigue:



En esta situación, lo único que hay que imponer para que exista régimen estacionario es que  $\mu > 0$ , porque siempre eventualmente el sistema se vaciará.

Aplicando conservación de flujo se tiene que las ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias son :

$$\lambda \cdot \pi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot \mu \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \pi_1 = \pi_0 \cdot \lambda \quad (2)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \pi_i = \pi_{i-1} \cdot \lambda \quad \forall i \geq 2 \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad (4)$$

De la ecuación (4) se tiene que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = (1 - \pi_0)$$

reemplazando en (1) :

$$\lambda \cdot \pi_0 = (1 - \pi_0) \cdot \mu \implies \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Reemplazando  $\pi_0$  en la ecuación (2) se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

Finalmente:

$$\pi_i = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i$$

2. El tiempo promedio que permanece una propuesta en el escritorio es :  $\frac{1}{\mu}$ .  
El número promedio de propuestas en el escritorio es :

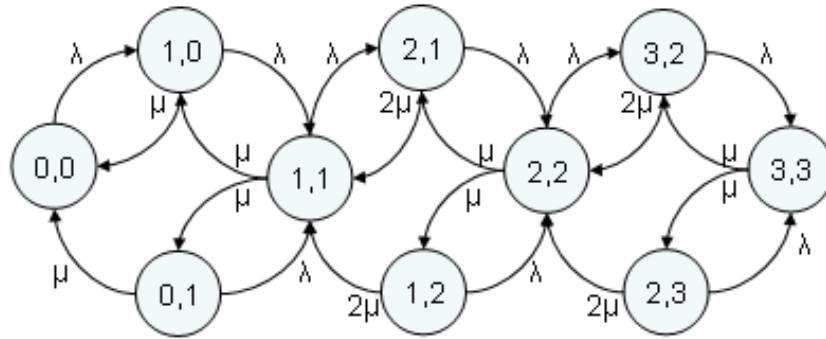
$$L_{propuestas} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i$$

Usando la serie :  $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho^2)}$

se obtiene finalmente que :

$$L_{propuestas} = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)\right)^2}$$

3. Definiendo los estados como un par ordenado, en que la primera componente es el numero de autos en la estación 1 y la segunda componente como el nmero de autos en la estación 2, la cadena queda como sigue:



4. La cadena es finita y todos los estados están comunicados, por lo que tiene probabilidades estacionarias y no hay necesidad de imponer condición alguna sobre las tasas .
- a) La fracción de clientes que en una hora no puede ingresar a la planta es :  $\Pi_{3,3}$
- b) El número promedio de autos en espera, en la planta esta dado por:

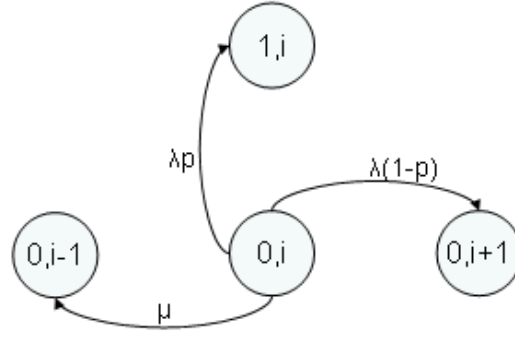
$$L_q = 1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}$$

- c) El tiempo promedio de espera en cola de un auto antes de ser atendido, está dado por la fórmula de Little:

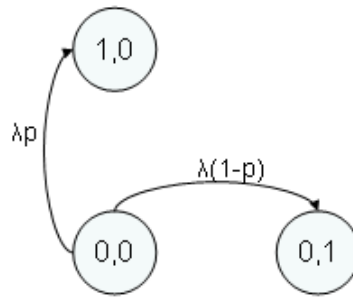
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}}{\lambda \cdot (1 - \pi_{3,3})}$$

## Pregunta 2

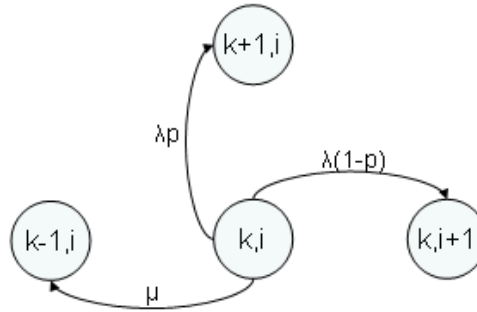
1. Los estados de la cadena de Markov serán pares ordenados. La primera componente nos indicará cuantos clientes tipo 1 se encuentran en el sistema. La segunda componente nos dirá cuantos clientes tipo 2 hay. Claramente mientras haya clientes tipo 1 en el sistema se estará atendiendo a un cliente tipo 1. Existen 3 clases de estados que generalizan toda la cadena (optamos por no escribir el grafo completo). La primera clase, se refiere a cuando hay personas tipo 2 y nadie tipo 1:



La segunda clase se refiere a cuando no hay gente en el sistema:



La tercera clase se refiere a cuando hay personas tipo 1:



2. Las ecuaciones de estado estacionario son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \pi_{j,i}(\lambda + \mu) &= \pi_{j-1,i} \lambda \cdot p + \pi_{j,i-1} \cdot \lambda \cdot (1-p) + \pi_{j+1,i} \cdot \mu \\
 \pi_{j,0}(\lambda + \mu) &= \pi_{j-1,0} \lambda \cdot p + \pi_{j+1,0} \cdot \mu \\
 \pi_{0,i}(\lambda + \mu) &= \pi_{0,i-1} \lambda \cdot (1-p) + \pi_{1,i} \cdot \mu \\
 \pi_{0,0}(\lambda + \mu) &= \pi_{0,1} \cdot \mu + \pi_{1,0} \cdot \mu \\
 \sum_{i,j} \pi_{i,j} &= 1
 \end{aligned}$$

3. Los clientes tipo 1 enfrentan un sistema M/M/1. Por lo tanto se aplican las formulas de este sistema:

$$W_1 = \frac{1}{\mu - \lambda \cdot p}$$

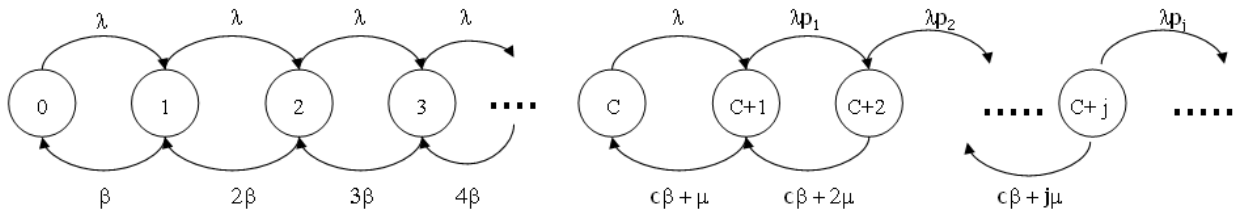
4. Utilizando las probabilidades estacionarias podemos calcular el número promedio de gente en el sistema. Con la formula de Little podemos calcular  $W_T$ , el tiempo de espera promedio de una persona cualquiera. Sin embargo sabemos que una persona cualquiera es tipo 1 con probabilidad  $p$ . Entonces para calcular  $W_2$ , el tiempo promedio de espera de un cliente tipo 2, debemos realizar el siguiente cálculo:

$$W_T = p \cdot W_1 + (1 - p) \cdot W_2$$

Donde la única incognita es  $W_2$ .

### Problema 3

1. Como es costumbre modelamos el número de personas en el sistema. La cadena toma la siguiente forma:



2. Al igual que en una cadena M/M/∞ solo necesitamos que  $\mu$  sea positivo, ya que la tasa de muerte es creciente y la de nacimiento está acotada por  $\lambda$ . Las expresiones necesarias para calcularlas son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i \cdot \pi_0 \quad , \quad \forall i \leq C$$

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu} \pi_0 \quad \forall i > C$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i + \sum_{i=C+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu}}$$

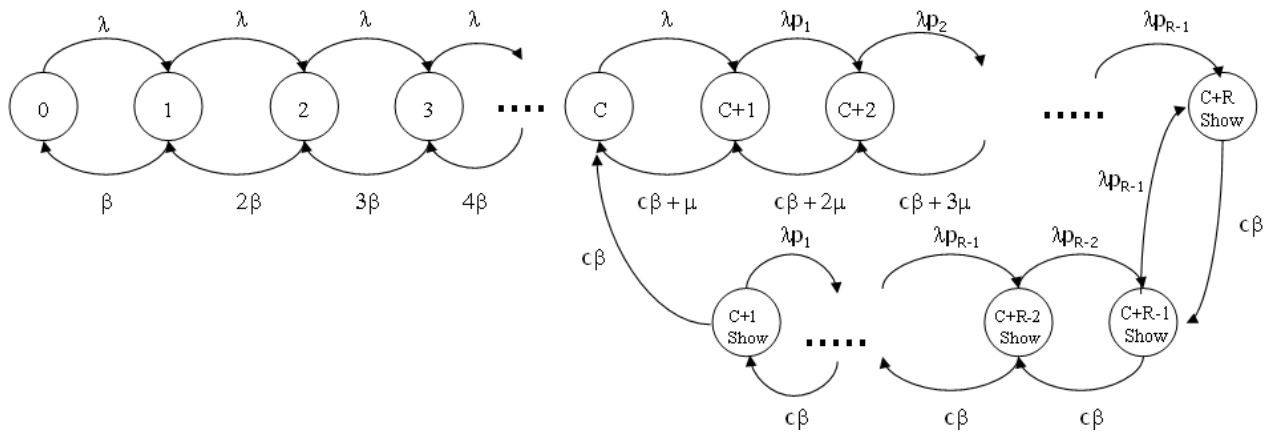
3. Supondremos conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.
- a) Razonamos calculando casos favorables sobre casos totales. Claramente los casos totales están dados por la cantidad de clientes que llegan en una hora ( $\lambda$ ). Los casos favorables son los siguientes:

$$C.F. = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot \lambda \cdot (1 - P_{i-C})$$

Entonces:

$$E[\% \text{ Clientes que no entran}] = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C})$$

- b) Considerando a todos los clientes:  $\lambda$  (sin comentarios)  
Sin considerar a los que entran:  $\lambda \cdot (1 - \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C}))$ .



4. La nueva situación puede ser modelada de la siguiente forma:

Acá hemos diferenciado explícitamente los estados en los cuales el guardia se encuentra en el escenario.

Dudas y/o errores:  
 Patricio Hernández G.  
 shernand@ing.uchile.cl