Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut
Aux : C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Tarea 3
Fecha entrega: 8 de Junio, 2004

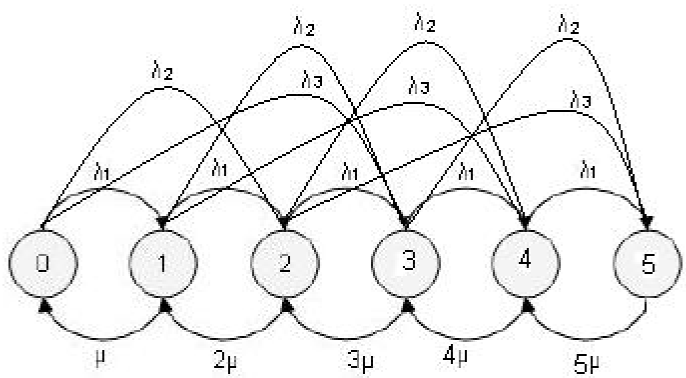
Problema 1

1. Para ahorrar notación, definimos las siguientes tasas por hora:

$$\lambda_1 = 0,1 \cdot 10, \lambda_2 = 0,7 \cdot 10, \lambda_3 = 0,2 \cdot 10$$

   Además, sea $\mu = 1/10(mins)$

   Luego, definiendo el estado i como aquél en que hay "i" clientes en la tienda, la cadena asociada al problema es la siguiente:



2. La cadena es finita e irreductible, por lo cual existirán probabilidades estacionarias.

3. Siendo π_i la probabilidad estacionaria asociada al estado i se tiene que:

   E[Autos que no logran entrar/hr] $= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \pi_5 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot \pi_4 + (\lambda_3) \cdot \pi_3 = 10 \cdot \pi_5 + 9 \cdot \pi_4 + 2 \cdot \pi_3$

4. Ahora nos fijamos en cuántos clientes trae cada auto y multiplicamos por 2 nuestros resultados para una hora:

   E[Clientes que no logran entrar/2 hrs] $= 2 \cdot [(\lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3) \cdot \pi_5 + (2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3) \cdot \pi_4 + (3 \cdot \lambda_3) \cdot \pi_3] =$
   $42 \cdot \pi_5 + 40 \cdot \pi_4 + 12 \cdot \pi_3$

5. Dada nuestra definición de estados, basta con ponderar i por la probabilidad estacionaria asociada a dicho estado i

$$E[N] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3 + 4 \cdot \pi_4 + 5 \cdot \pi_5$$

6. Abordamos el problema pensando que un cliente realiza el gasto de los $1.000 cuando llega:

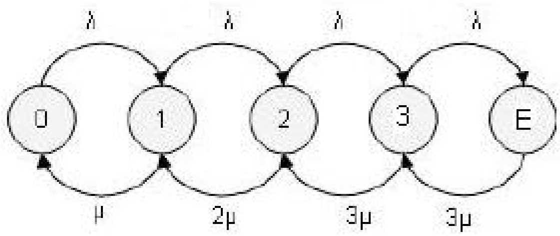
$E[Ut/hora] = (1000 \cdot \lambda_1 + 2000 \cdot \lambda_2 + 3000 \cdot \lambda_3) \cdot \pi_0 + (1000 \cdot \lambda_1 + 2000 \cdot \lambda_2 + 3000 \cdot \lambda_3) \cdot \pi_1 + (1000 \cdot \lambda_1 + 2000 \cdot \lambda_2 + 3000 \cdot \lambda_3) \cdot \pi_2 + (1000 \cdot \lambda_1 + 2000 \cdot \lambda_2) \cdot \pi_3 + (1000 \cdot \lambda_1) \cdot \pi_4$

Problema 2

Definimos los siguientes estados:

- i: Hay "i" libros ocupados y ningún estudiante en espera.
- E: Hay 3 libros ocupados y un estudiante en espera.

Entonces, la cadena asociada al problema es la siguiente:



Para responder las preguntas, debemos primero escribir el sistema de ecuaciones que permite calcular las probabilidades estacionarias:

$$\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \Pi_1\mu \\
\Pi_1(\mu+\lambda) &= \Pi_0\lambda + \Pi_2 \cdot 2\mu \\
\Pi_2(2\mu+\lambda) &= \Pi_1\lambda + \Pi_3 \cdot 3\mu \\
\Pi_3(3\mu+\lambda) &= \Pi_2\lambda + \Pi_E \cdot 3\mu \\
\Pi_E \cdot 3\mu &= \Pi_3\lambda \\
\sum_k \Pi_k &= 1
\end{aligned}$$

Entonces, siendo los π_i la solución al sistema anterior, se tendrá que:

1. E[Libros prestados] $= 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot (\pi_3 + \pi_E)$
2. Si entendemos que una solicitud es "rechazada" cuando no le prestan el libro inmediatamente ni queda en espera, se tiene lo siguiente:

   E[Solicitudes rechazadas/hr] $= \Pi_E \cdot \lambda$
3. P[Encontrar libro disponible] $= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$

Problema 3

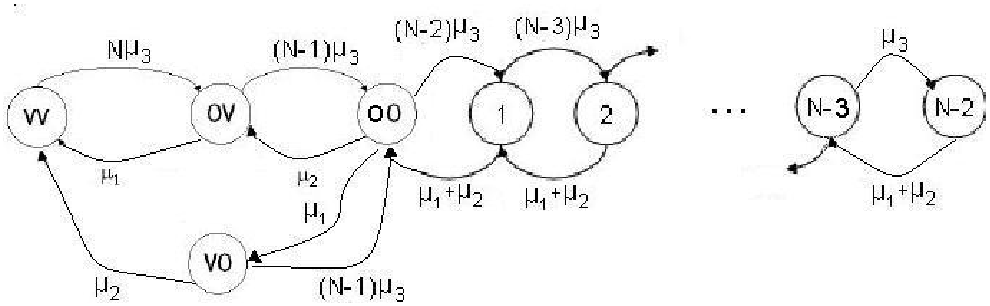
1. Definimos los siguientes estados:

   - (i,j): El muelle 1 está en estado "i" y el muelle 2, en estado "j", con $i,j \in$ {Vacío, Ocupado}
   - k: Hay "k" barcos en espera de un muelle, con $k \in$ {1,...,N-2}

   Además, trabajamos con la siguiente notación:

   $$\mu_1 = 1/t_1, \mu_2 = 1/t_2, \mu_3 = 1/t_3$$

   Entonces, la cadena asociada al problema es la siguiente:



2. El sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_{VV} \cdot N\mu_3 &= \pi_{OV} \cdot \mu_1 + \pi_{VO} \cdot \mu_2 \\
\pi_{OV} \cdot (\mu_1 + (N-1)\mu_3) &= \pi_{VV} \cdot N\mu_3 + \pi_{OO} \cdot \mu_2 \\
\pi_{VO} \cdot (\mu_2 + (N-1)\mu_3) &= \pi_{OO} \cdot \mu_1 \\
\pi_{OO} \cdot (\mu_2 + (N-2)\mu_3) &= \pi_{OV} \cdot (N-1)\mu_3 + \pi_1 \cdot (\mu_1 + \mu_2) \\
\pi_1 \cdot (\mu_1 + \mu_2 + (N-3)\mu_3) &= \pi_{OO} \cdot (N-2)\mu_3 + \pi_2 \cdot (\mu_1 + \mu_2) \\
\pi_i \cdot (\mu_1 + \mu_2 + (N-(i+2))\mu_3) &= \pi_{i-1} \cdot (N-(i+1))\mu_3 + \pi_{i+1} \cdot (\mu_1 + \mu_2) \quad \forall i \in \{2, ..., N-3\} \\
\pi_{N-2} \cdot (\mu_1 + \mu_2) &= \pi_{N-3} \cdot \mu_3 \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

3. Abordamos el problema pensando que un ciclo comienza cuando el barco sale vacío de un muelle y termina cuando descarga. Así, en términos esperados un barco demora t_3 más lo que demora en espera en las cercanías del muelle (si es que le toca esperar) más el tiempo de descarga. Obviamente, esto dependerá del número de barcos que están por delante de él. Meditando un poco, se tiene que la expresión para el tiempo que demora en promedio un barco en realizar el ciclo completo es:

   $E[T] = t_3 + t_1(\pi_{VV} + \pi_{VO}) + t_2 \cdot \pi_{OV} + (2t_1 \cdot \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + 2t_2 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}) \cdot \pi_{OO} + \sum_{i=1}^{N-3} [\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (kt_1 + (i-k)t_2 + 2t_1 \cdot \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + 2t_2 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}) (\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2})^k (\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})^{i-k}] \cdot \pi_i$

4. Propuesto (basta con reemplazar estos valores particulares en las ecuaciones de flujo planteadas en la parte 2 y resolver el sistema).

5. Abordamos el costo de espera, pensando que cada barco incurre en ese gasto cuando se ubica en la cola. Esto ocurre cuando llega en el estado OO o en los estados tipo i:

   $E(Costos) = c \cdot (N-2)\mu_3 \cdot \Pi_{OO} + \sum_{1=1}^{N-3} c \cdot (N-(i+2))\mu_3 \cdot \Pi_i$

Comentarios y/o Consultas:
Mario Guajardo.
`mguajard@ing.uchile.cl`