DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 02 de Junio, 2004

Problema 1

La oficina de Entrega de Certificados de una prestigiosa Escuela de Ingeniería, ha contratado una muy agraciada secretaria, la cual causa sensación dentro del alumnado masculino. Es por esto que se le ha encargado a ud. el estudio del sistema de atención con el que actualmente se opera.

En la oficina, sólo existe un puesto de espera, además del lugar que ocupa el estudiante que se está atendiendo. Los alumnos que llegan y encuentran, tanto a la secretaria como el lugar de espera ocupados, se retiran indignados.

Los estudiantes llegan a pedir certificados según un proceso de Poisson de tasa λ [alumnos/hora]. Con probabilidad p un alumno es hombre, y con $1-p$, mujer.

La secretaria demora en la atención, un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ para los hombres y $\frac{1}{\gamma}$ para las mujeres, con $\mu \leq \gamma$.

Además se sabe que las alumnas, víctimas de una irrefrenable envidia, están como máximo en el lugar de espera un tiempo que sigue una distribución exponencial de parámetro β, luego del cual se retiran furiosas, sin haber recibido la atención. Por otro lado si un estudiante hombre está en el puesto de espera, ni tonto ni perezoso, se queda en ese lugar hasta que la afamada secretaria se desocupe y le preste el servicio requerido.

1. Modele el estado de ocupación de la Oficina de Certificados como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias y que el sistema lleva operando por "mucho tiempo", responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es la cantidad de alumnos (en total) que, en una hora, se retiran indignados al encontrar la oficina llena?
   b) Si un hombre llega y logra entrar al sistema, en promedio cuánto tiempo tendrá que esperar hasta ser atendido?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer se retire indignada del lugar de espera, antes de que termine la atención de la persona que está con la secretaria?

Problema 2

Una casa comercial ha decidido clasificar a sus clientes en 2 tipos: los tipo 1, *que recomiendan la tienda a sus amigos* y los tipo 2, *que no la recomiendan.* El gerente comercial sabe que cada uno de los clientes que recomiendan la tienda traerá un nuevo cliente luego de un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa λ, el cual con probabilidad r será de tipo 1, y con probabilidad $(1-r)$ será de tipo 2. Además, a esta casa comercial llegan clientes tipo 2 de manera exógena, según un proceso de Poisson de tasa θ.

Se sabe que un cliente del tipo 1 dejará de ser cliente de la casa comercial luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa μ. De la misma manera, un cliente tipo 2 dejará de ser cliente luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa ν.Modele la base de clientes de la casa comercial como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición.

Problema 3

Un Servicio Público es atendido por un único empleado. La llegada de clientes al local sigue un proceso de poisson de tasa α [personas/hora]. Por su parte, el tiempo que tarda el empleado en cada atención sigue una exponencial de media $\frac{1}{\beta}$ [horas].

El local cuenta con una sala de espera con capacidad para 2 personas, además de la que se está atendiendo, y la política de atención es por orden de llegada.

Los clientes que llegan y encuentran el local lleno, se retiran indignados. Cada cliente que se va del local sin ser atendido representa un costo de imagen para el Servicio en cuestión de K[u.m]

1. (3.0 pts) Modele el estado de ocupación del local como una Cadena de Markov en tiempo continuo.

   Considere ahora que el sistema ya ha alcanzado su estado estacionario y asuma conocidas las probabilidades estacionarias.

2. (1.5 pts) Un cliente que logra entrar al sistema, ¿cuánto tiempo debe esperar en promedio hasta COMENZAR a ser atendido por el empleado?

3. (1.5 pts) En el largo plazo, ¿cuál es el costo esperado por hora, producto de clientes que se retiran sin ser atendidos?

Problema 4

Un organismo unicelular tiene un ciclo de vida que permite distinguir 2 posible estados: Inmaduro (I) o desarrollado (D). Un individuo inmaduro permanece en ese estado un tiempo exponencialmente distribuido, con media $1/a$ [minutos]. Un individuo desarrollado permanece en ese estado un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/b$ [minutos], al cabo del cual se divide en 2, dando origen a 2 individuos inmaduros.

1. Formule un modelo de Markov en tiempo continuo que permita describir la evolución de una población de estos organismos, la cual comienza en $t = 0$ con un individuo inmaduro, ¿Qué estados definiría?. ¿Cuáles son las tasas de transición entre ellos?.

2. Suponga que el tiempo transcurre hacia el infinito. ¿Cuál es el número de individuos que esperaría que hubiesen?.