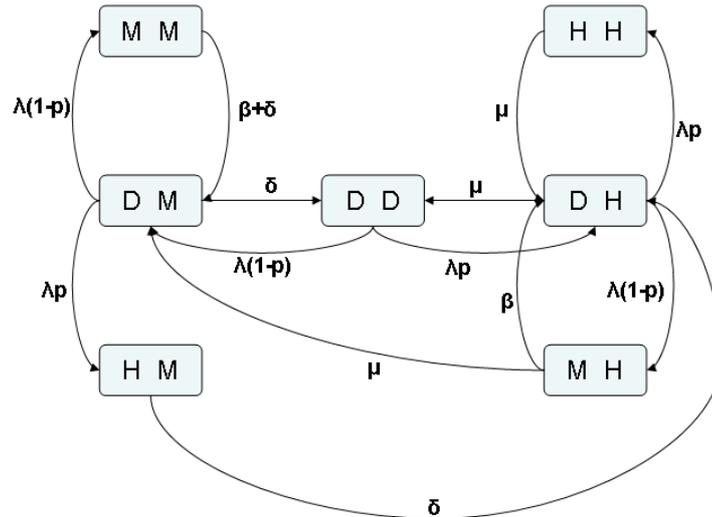




Clase Auxiliar 02 de Junio, 2004

Problema 1

- La cadena de Markov queda de la siguiente forma:



- Tenemos una cadena irreducible y finita \rightarrow Existen probabilidades estacionarias. Para encontrarlas debemos plantear el sistema de ecuaciones de balance en los nodos. El sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{DM} \cdot \gamma + \pi_{DH} \cdot \mu \\
 \pi_{DM} \cdot (\lambda + \gamma) &= \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) + \pi_{DD} \cdot \lambda(1 - p) + \pi_{MH} \cdot \mu \\
 \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) &= \pi_{DM} \cdot \lambda(1 - p) \\
 \pi_{HM} \cdot \gamma &= \pi_{DM} \cdot \lambda p \\
 \pi_{DH} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{HH} \cdot \mu + \pi_{DD} \cdot \lambda p + \pi_{MH} \cdot \beta + \pi_{HM} \cdot \gamma \\
 \pi_{HH} \cdot \mu &= \pi_{DH} \cdot \lambda p \\
 \pi_{MH} \cdot (\beta + \mu) &= \pi_{DH} \cdot \lambda(1 - p) \\
 \sum_i \pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

- Consideramos conocidas las probabilidades estacionarias:

- Primero identificamos los estados en los cuales, de llegar un alumno, se deberá retirar por que encuentra ambos lugares ocupados. Entonces, dado que en cada uno de estos estados la tasa de llegada de alumnos es la misma (λ), tendremos que:

$$E[\text{Alumnos perdidos}] = \lambda \cdot (\pi_{MM} + \pi_{HH} + \pi_{HM} + \pi_{MH})$$

- b) Si un hombre llega y encuentra un lugar, la esperanza del tiempo de espera dependerá del estado en el que encuentra al sistema. De esta forma:

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

- c) Si la persona que esta antes que ella (atendiéndose) es un hombre, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta + \mu}$$

Si la persona que esta antes que ella (atendiéndose) es una mujer, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\gamma}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Para calcular la probabilidad solo debemos ponderar por la probabilidad de encontrar al sistema en un estado en particular.

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Problema 2

Si denotamos $X(t)$ e $Y(t)$ a las cantidades de clientes tipo 1 y tipo 2 respectivamente, en el instante t . Luego $\{[X(t), Y(t)], t \geq 0\}$ es una Cadena de Markov en Tiempo Continuo con las siguientes tasas infinitesimales:

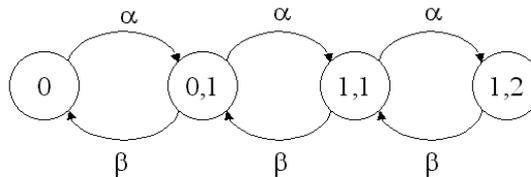
$$\begin{aligned} q[(n, m), (n + 1, m)] &= n\lambda r & q[(n, m), (n, m + 1)] &= n\lambda(1 - r) + \theta \\ q[(n, m), (n - 1, m)] &= n\mu & q[(n, m), (n, m - 1)] &= m\nu \end{aligned}$$

Problema 3

- Los estados son los siguientes:

- (0,0): No hay clientes ni en la sala de espera ni atendiéndose
- (0,1): Hay un cliente atendiéndose y la sala de espera esta vacía.
- (1,1): Hay un cliente atendiéndose y un cliente en espera.
- (2,1): Hay un cliente atendiéndose y dos en espera.

Luego la cadena se muestra en la siguiente figura:



2. Notamos en primer lugar que la fracción de clientes que en largo plazo logran ser atendidos corresponde a $\Pi_{(0,0)} + \Pi_{(0,1)} + \Pi_{(1,1)}$.

Dado que en promedio el empleado demora $\frac{1}{\beta}$ en atender un cliente, un cliente que efectivamente es atendido, debe esperar en promedio hasta comenzar a ser atendido:

$$E(T \text{ espera/cliente es atendido}) = \frac{\Pi_{(0,1)}}{\Pi_{(0,0)} + \Pi_{(0,1)} + \Pi_{(1,1)}} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{\Pi_{(1,1)}}{\Pi_{(0,0)} + \Pi_{(0,1)} + \Pi_{(1,1)}} \cdot \frac{2}{\beta}$$

3. El número de clientes por hora que en el largo plazo se van sin ser atendidos es:

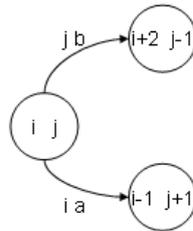
$$\Pi_{(2,1)} \cdot \alpha$$

Por lo tanto, en el largo plazo, el costo esperado por hora es:

$$E(\text{Costo por hora}) = K \cdot \Pi_{(1,2)} \cdot \alpha$$

Problema 3

1. Primero debemos notar que la cadena es infinita, por lo tanto para tener una representación gráfica debemos generalizar. Si modelamos como estado el número de individuos inmaduros y desarrollados, entonces la cadena es la que se muestra en la figura (para un estado genérico).



2. Como el número de individuos nunca disminuye y las tasas de transición aumentan con esta evolución, en el largo plazo habrán infinitas personas.

Dudas y/o errores:
 Patricio Hernández G.
 shernand@ing.uchile.cl