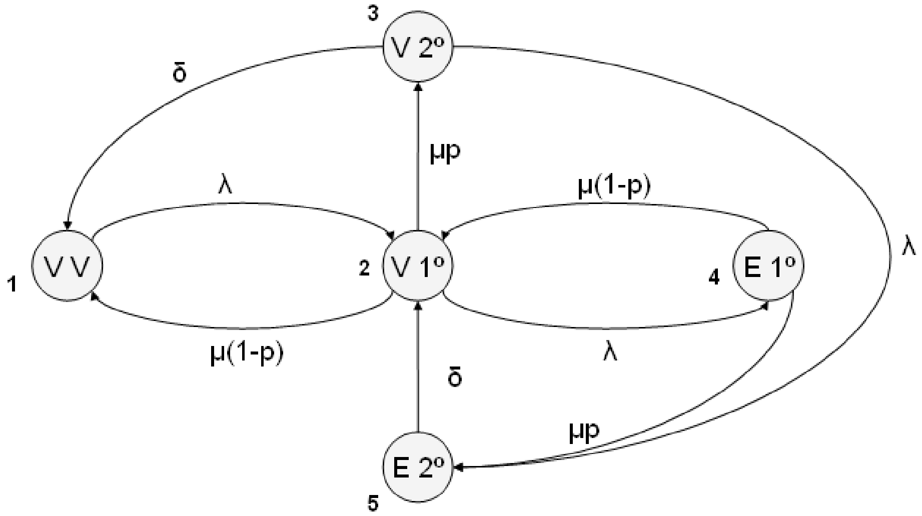
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 01 de Junio, 2004

Problema 1

1. La cadena queda de la siguiente forma (se deben especificar las tasas de transición en lugar de las probabilidades de transición)



El por que se puede modelar como una cadena de Markov tiene que ver con la distribución de los tiempos entre transiciones y la perdida de memoria de la distribución exponencial. Las ecuaciones de estado estacionario son bastante parecidas a ecuaciones de conservación de Flujo. Lo que entra (a la tasa a la que lo hace) es igual a todo lo que sale (la tasa a la que lo hace).

$$\begin{aligned}
\pi_1\lambda &= \Pi_2\mu(1-p)+\Pi_3\delta \\
\Pi_2(\mu+\lambda) &= \Pi_1\lambda+\Pi_3\delta+\Pi_4\mu(1-p) \\
\Pi_3(\delta+\lambda) &= \Pi_2\mu p \\
\Pi_4\mu &= \Pi_2\lambda \\
\Pi_5\delta &= \Pi_4\mu p+\Pi_3\lambda \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}$$

2. En el largo plazo del total de clientes que llegan al sistema, solo podrán entrar los que lo encuentren en los estados 1, 2 o 3, en los cuales hay un puesto vacío. Si interpretamos las probabilidades estacionarias como la fracción del tiempo que (en el largo plazo) el sistema se encuentra en un estado, entonces la fracción de clientes que usan el cajero será:

$$\text{Fracción} = \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3$$

3. Siguiendo el mismo tipo de razonamiento vemos que (utilizando $\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$):

$$P[\text{al llegar había 1 en } 2^a \text{ transacción}] = \frac{\Pi_3}{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3}$$

4. Si lo encuentra en la segunda operación esperaran en promedio $\frac{1}{\delta}$.
   Si lo encuentran en la primera esperaran en promedio $\frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\delta}$ (con probabilidad p debe esperar una segunda transacción).

5. Utilizando las partes anteriores y los resultados de la primera clase auxiliar del ramo:

$$E(\text{Espera}) = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} + [\frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\delta}] \cdot \frac{\Pi_2}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

6. La tasa efectiva de llegadas de clientes al sistema es

$$\lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

   Ahora, si filtramos el proceso de llegada tendremos que los clientes que pagan solo b llegan con tasa:

$$\lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot (1 - p)$$

   y los que pagan $2b$ llegan con tasa:

$$\lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot p$$

   Entonces las ganancias esperadas en una hora (en el largo plazo) serán:

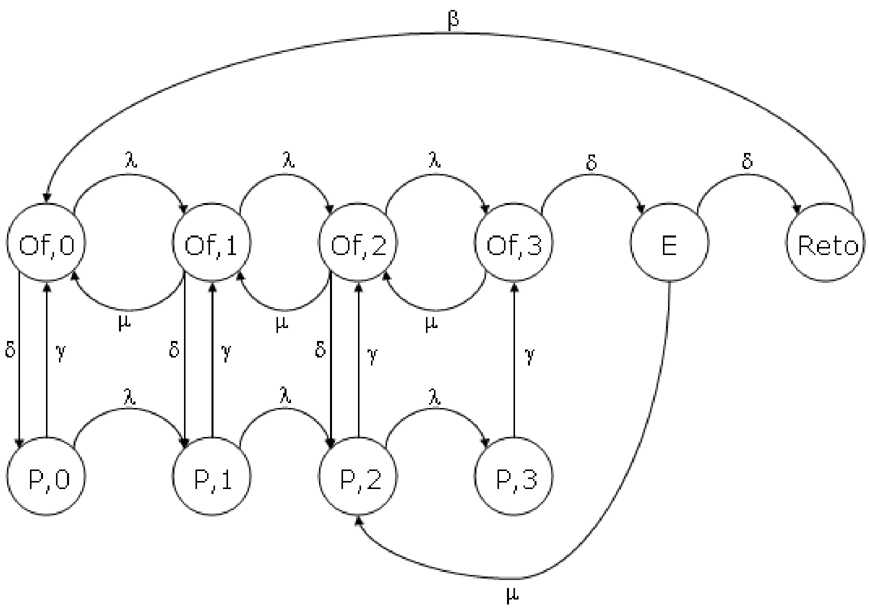
$$E[\text{Beneficios}] = \lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot (1 - p) \cdot b + \lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot p \cdot 2b$$

Problema 2

1. Para modelar esta situación como una cadena de Markov debemos considerar la localización de Armijo, ya que solo si se encuentra trabajando podrá responder correo, pero el correo le llegará en cualquier localización. Además debemos distinguir un estado especial donde Armijo tendrá tres mails acumulados y un llamado perdido por parte de su novia, esto por que solo desde aquí se podrá viajar a un estado de reto o al estado donde esta con su novia y tiene 2 mails. Es importante notar que minetras esta con su novia pueden llegarle mails por lo que no nos sirve un estado que solo nos diga si esta con su novia, adicionalmente nos debe entregar información acerca de la carga de trabajo acumulada. De acuerdo a esto la cadena de Markov toma la siguiente forma:

2. Estamos frente a una cadena finita, por lo que definitivamente existirán probabilidades estacionarias (aquí no tiene sentido hablar de periodos de estados o clases, por lo que justificaciones del tipo "existe una única clase recurrente aperiódica" están malas)

   Las ecuaciones que determinan el valor de las probabilidades estacionarias son las siguientes:



$$
\begin{aligned}
\pi_{Of,0} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{Reto} \cdot \beta + \pi_{Of,1} \cdot \mu + \pi_{P,0} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,1} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,0} \cdot \lambda + \pi_{Of,2} \cdot \mu + \pi_{P,1} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,2} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,1} \cdot \lambda + \pi_{Of,3} \cdot \mu + \pi_{P,2} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,3} \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,2} \cdot \lambda + \pi_{P,3} \cdot \gamma \\
\pi_{P,0} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,0} \cdot \delta \\
\pi_{P,1} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,1} \cdot \delta + \pi_{P,0} \cdot \lambda \\
\pi_{P,2} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,2} \cdot \delta + \pi_{P,1} \cdot \lambda + \pi_E \cdot \mu \\
\pi_{P,3} \cdot \gamma &= \pi_{P,2} \cdot \lambda \\
\pi_E \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,3} \cdot \delta \\
\pi_{Reto} \cdot \beta &= \pi_E \cdot \delta \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

3. Supongamos que estamos durante toda una hora en el estado de reto. La tasa de salida del estado es β, por lo que en términos esperados habrán β retos durante esa hora. Sin embargo dado que no estoy todo el tiempo en ese estado debo ponderar por el tiempo que efectivamente estoy en ese estado. Entonces:

$$E[Retos/hora] = \pi_{Reto} \cdot \beta$$

   Otra respuesta valida es suponer que estamos durante una hora en el estado E. Si fuese así habrían δ retos por hora. Entonces análogamente al caso anterior la respuesta sería:

$$E[Retos/hora] = \pi_E \cdot \delta$$

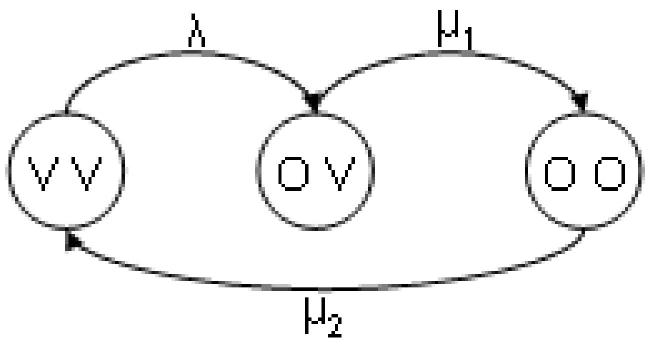
   Ambas respuestas son equivalentes (basta revisar las ecuaciones de la parte 2).

4. La respuesta es simplemente

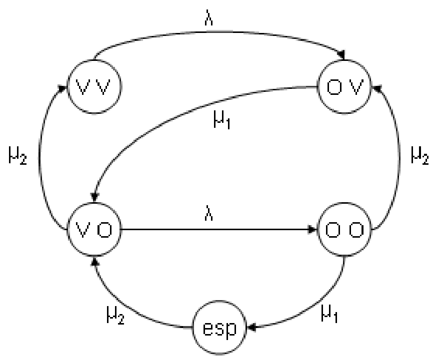
$$\pi_{Of,0}$$

Problema 3

1. La cadena (y las tasas de transición) se muestran en la figura .



2. Es importante notar que en una cadena de Markov en tiempo continuo los tiempos entre transiciones deben distribuirse exponencialmente. Por esto es que debemos modelar explícitamente el estado en el cual la persona sentada en el primer asiento se encuentra esperando. De acuerdo a esto, la cadena es la mostrada en la figura .



3. Para esto necesitaremos calcular las probabilidades estacionarias. Las ecuaciones (conservación de flujo) son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{VV}\lambda &= \Pi_{VO}\mu_2 \\
\Pi_{OV}\mu_1 &= \Pi_{VV}\lambda + \Pi_{OO}\mu_2 \\
\Pi_{VO}(\lambda+\mu_2) &= \Pi_{VO}\mu_1 + \Pi_{ESP}\mu_2 \\
\Pi_{OO}(\mu_1+\mu_2) &= \Pi_{VO}\lambda \\
\Pi_{ESP}\mu_2 &= \Pi_{OO}\mu_1 \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

   Suponiendo los valores de Π como conocidos y utilizando el mismo tipo de argumento de la pregunta 2 tendremos que:

$$\text{Fracción} = \Pi_{VV} + \Pi_{VO}$$

4. Utilizando la parte anterior, la tasa efectiva de entrada será:

$$\lambda \cdot [\Pi_{VV} + \Pi_{VO}]$$

5. Interpretando las probabilidades estacionarias la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$E[\text{Personas en el sistema}] = \Pi_{VO} + \Pi_{OV} + 2 \cdot \Pi_{OO} + 2 \cdot \Pi_{Esp}$$

6. Si llega y los dos puestos están vacíos estará en el local en promedio $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$. Si llega y el segundo puesto está ocupado, estará en promedio:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}$$

   Esto puesto que siempre deberá estar el tiempo de atención en la primera silla y en la segunda silla y con una probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ deberá esperar la atención del tipo en la segunda silla.
   Ocupando probabilidades totales:

$$E[T] = \frac{\Pi_{VV}}{\Pi_{VV} + \Pi_{VO}} \cdot [\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}] + \frac{\Pi_{VO}}{\Pi_{VV} + \Pi_{VO}} \cdot [\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}]$$

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl