



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut  
Aux : C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

## Tarea 2

Fecha entrega: Martes 8 de Junio, 2004

### Problema 1

Una pequeña tienda tiene espacio para cinco clientes solamente. Los clientes llegan en autos de manera aleatoria, según un proceso de Poisson de tasa 10 autos por hora. El número de personas dentro de cada auto es una variable aleatoria  $N$ , donde  $\Pr[N = 1] = 0,1$ ,  $\Pr[N = 2] = 0,7$  y  $\Pr[N = 3] = 0,2$ . Las personas que llegan en los autos entran a la tienda, donde se quedan un tiempo exponencialmente distribuido de media 10 minutos. Las personas actúan independiente del resto y cuando terminan de comprar salen individualmente y esperan en el auto por el resto de sus acompañantes. Si al llegar un auto, la tienda no tiene espacio para todos las personas del auto, éste se retira y nadie del auto entrará a la tienda.

1. Modele la tienda como una cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y, en lo que sigue, asmalas como conocidas.
3. ¿Cuál es el número esperado en una hora de autos que intentan entrar al sistema y no logran hacerlo?
4. ¿Cuál es el número esperado en 2 horas de clientes que intentan entrar al sistema y no logran hacerlo?
5. ¿Cuál es el número promedio de personas en el sistema?
6. Si en promedio, cada persona gasta \$1.000 dentro de la tienda, ¿cuál es el beneficio esperado por unidad de tiempo en el largo plazo?.

### Problema 2

Una biblioteca cuenta con tres volúmenes de un mismo libro para prestar a sus usuarios. Los lectores llegan a la biblioteca de acuerdo a un proceso Poissoniano uniforme de tasa  $\lambda$ [Lectores / hora]. Un libro que es prestado será devuelto sólo cuando el usuario haya terminado de utilizarlo. El tiempo que demora un lector en leer un libro es una v.a. exponencialmente distribuida con media  $1/\mu$ [horas]. Si un usuario encuentra que no hay libros disponibles, puede pedir a la bibliotecaria que le deje el libro reservado. Apenas un libro es devuelto, la bibliotecaria llama por teléfono a quien lo tenía reservado, para que lo pase a retirar. La experiencia indica que el tiempo que pasa desde el llamado telefónico hasta que la persona pasa a buscar el libro es exactamente igual a cero. La bibliotecaria eso sí, no admite que haya más de un libro reservado.

1. En promedio, ¿cuál es el número de libros que están prestados?.
2. En promedio, ¿cuántas solicitudes de préstamo se rechazan por unidad de tiempo?.
3. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un libro disponible?.

### Problema 3

Cierto puerto ubicado en el sur del país está especialmente equipado para la descarga de mineral. Una flota de  $N$  barcos está a cargo del transporte del mineral. El puerto dispone de dos muelles destinados a descargar los barcos. El muelle 1 demora en promedio  $t_1$  en descargar mientras que el muelle 2 tarda  $t_2$ . Algunos estudios realizados han permitido determinar que el tiempo de descarga en ambos muelles sigue una distribución exponencial. Por otro lado, el tiempo que demora un barco desde que sale del puerto (vacío) y regresa (cargado) es una variable aleatoria exponencial de media  $t_3$ . Cuando un barco llega al puerto ingresa el muelle 1 si éste se encuentra vacío, sino ingresa al muelle 2. De estar ambos muelles ocupados esperará en las cercanías hasta que alguno de los muelles se desocupe.

1. Modele el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo. Construya el grafo asociado explicitando las tasa de cambio de un estado a otro.
2. Determine las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias.
3. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias, ¿Cuánto es el tiempo en promedio que un barco demora en realizar un ciclo completo?
4. Si  $t_1 = 8hrs$  ,  $t_2 = 16hrs$  ,  $t_3 = 96hrs$  y  $N = 4$  determine las probabilidades estacionarias del sistema.
5. Si existe un costo de  $c = 1$  por tener un barco esperando, ¿cuál es el costo diario del puerto por este concepto?.