Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Antoine Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

Pauta Control 2 IN44A, Viernes 16 de Mayo del 2003

Problema 1

Sea N(t) el proceso de llegada de gente a la automotora.

1. Claramente $Q(t)$ no es un proceso de Poisson homogéneo. Dado que la tasa de llegada de este proceso depende el número de unidades vendidas la propiedad de incrementos estacionarios y la de incrementos independientes no se cumplirán.

2. Filtraremos el proceso $N(t)$ respecto a clientes que comprar el **primer** auto y clientes que no. La probabilidad que un cliente cualquiera compre el primer auto es $\overline{F}(P(1))$. Por lo tanto el proceso de llegada de clientes que compran el primer auto es Poisson de tasa $\lambda \cdot \overline{F}(P(1))$.

   Notamos que este proceso de Poisson es idéntico al proceso de venta de automoviles $Q(t)$ hasta que el primer auto es vendido. En este instante nuestro proceso filtrado mantiene su tasa $\lambda\overline{F}(P(1))$ mientras que $Q(t)$ pasa a tener una tasa $\lambda\overline{F}(P(2))$. Dado que nuestros cálculos se refieren a instantes menores o iguales al instante de venta del primer auto el desarrollo es valido para $Q(t)$

   Por otro lado nosotros sabemos que los tiempos entre llegadas de un proceso de poisson de tasa λ son variables aleatorias exponenciales de parámetro λ. Por esto tendremos que:

$$E[x_1] = \int_0^\infty t \cdot \lambda\overline{F}(P(1)) \cdot e^{-\lambda\overline{F}(P(1))} = \frac{1}{\lambda\overline{F}(P(1))}$$

3. Nuevamente filtramos $N(t)$. El proceso de personas que llegan hasta la automotora y no comprar, para t menores al instante de venta del primer auto es Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(1))$.

   Entonces $N(t)-Q(t)$ hasta el instante de la primera venta se comporta como un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(1))$

   Entonces:

$$\begin{aligned} E[N(t)|x_1 = t] &= 1 + E[N(t) - Q(t)] \\ &= 1 + \lambda \cdot F(P(1)) \end{aligned}$$

4. Como vimos, si filtramos el proceso de llegada de clientes hasta el instante de la venta del primer auto concluiremos que el proceso de venta hasta ese instante es poisson de tasa $\lambda\overline{F}(P(1))$. Desde ese instante en adelante (y reiniciando nuestro reloj) tendremos que el proceso de llegada de clientes que compran es Poisson de tasa $\lambda\overline{F}(P(2))$. De esta forma, desde el instante de la venta del (i-1)-ésimo automóvil el proceso de venta es Poisson de tasa $\lambda\overline{F}(P(i))$ hasta el instante de venta del i-ésimo. Ahora, dado que el tiempo entre arribos de un proceso de Poisson se distribuye exponencial tendremos que:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \sum_{i=1}^{C} x_i$$

   Donde $x_i \rightsquigarrow exp(\lambda \cdot \overline{F}(P(i)))$, tiempo entre llegadas del proceso. De esta forma:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{C}\frac{1}{\overline{F}(P(i))}$$

5. Claramente de la parte 1 $x_1 \rightsquigarrow exp(\lambda \cdot \overline{F}(P(1))$. Condicionando sobre el instante de venta del primer auto vemos que (suponiendo que $P(1) \neq P(2)$):

$$\begin{aligned}
P[Q(t)=1] &= \int_0^t P[Q(t)=1|x_1=s]\cdot \lambda \cdot \overline{F}(P(1))e^{-\lambda\cdot\overline{F}(P(1))s}ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda\cdot\overline{F}(P(2))(t-s)}\cdot \lambda \cdot \overline{F}(P(1))e^{-\lambda\cdot\overline{F}(P(1))s}ds \\
&= \frac{\overline{F}(P(1))}{\overline{F}(P(1))-\overline{F}(P(2))}\left[e^{-\lambda\overline{F}(P(2))s} - e^{-\lambda\overline{F}(P(1))s}\right]
\end{aligned}$$

6. Calculemos primero la probabilidad de no haber vendido el auto. Sean:

   $N^x(t)$ = proceso de llegada de gente que no se lleva lápices y que compra.
   $N^l(t)$ = proceso de llegada de gente que se lleva lápices.

   Hasta x_1, $N^x(t)$ tiene tasa $\lambda \cdot \overline{F}(P(1)) \cdot (1-q)$ y $N^l(t)$ tiene tasa $\lambda \cdot q$. Ahora simplemente debemos imponer que ninguno de estos tipos haya llegado hasta t y además que de los n que se llevaron lápices ninguno haya comprado. Esto es:

$$\begin{aligned}
P[x_1 > t|N^l(t)=n] &= P[N^x(t)=0]\cdot F(P(1))^n \\
&= e^{-\lambda\cdot\overline{F}(P(1))\cdot(1-q)}\cdot F(P(1))^n
\end{aligned}$$

   Entonces la probabilidad que buscamos es:

$$P[x_1 \leq t|N^l(t)=n] = 1 - P[x_1 > t|N^l(t)=n]$$

7. **Bonus.** Encontraremos $P[x_1 \leq s|Q(t)=1]$, con $t \geq s$, usando el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
P[x_1 \leq s|Q(t)=1] &= P[Q(s)=1|Q(t)=1] \\
&= \frac{P[Q(t)=1|Q(s)=1]\cdot P[Q(s)=1]}{P[Q(t)=1]}
\end{aligned}$$

   Pero

$$P[Q(t)=1|Q(s)=1] = e^{-\lambda\overline{F}(P(2))(t-s)}$$

   Utilizando el resultado del punto 4 vemos que:

$$P[x_1 \leq s|Q(t)=1] = \frac{e^{-\lambda\overline{F}(P(2))(t-s)}\cdot\left[e^{-\lambda\overline{F}(P(2))s} - e^{-\lambda\overline{F}(P(1))s}\right]}{\left[e^{-\lambda\overline{F}(P(2))t} - e^{-\lambda\overline{F}(P(1))t}\right]}$$

Entonces $f(x_1|Q(t)=1) = \frac{d(P[x_1 \leq s|Q(t)=1])}{ds}$

Sea $R(t)$ el número de clientes que han llegado dado que hasta t solo se ha vendido un auto. A partir del instante de la primera venta la intensidad de llegada (la tasa) varia. Entonces para responder esta parte debemos identificar el punto en el cual la tasa varia. Sin embargo nosotros sabemos la distribución de dicho punto (de parte anterior). Definiendo $N_i(t)$ como un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(i))$, tendremos que:

$$\begin{aligned} E[R(t)|x_1 = s] &= 1 + E[N_1(s)] + E[N_2(t-s)] \\ &= 1 + (\lambda \cdot F(P(1)) \cdot s) + (\lambda \cdot F(P(2)) \cdot (t-s)) \end{aligned}$$

Descondicionando:

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= \int_0^t E[R(t)|x_1 = s] \cdot f(s|Q(t)=1) ds \\ &= 1 + \int_0^t (\lambda \cdot F(P(1)) \cdot s) + (\lambda \cdot F(P(2)) \cdot (t-s)) \cdot f(s|Q(t)=1) ds \end{aligned}$$

No es necesario desarrollar más la expresión.

Problema 2

1. Como cada cliente puede demandar sólo una unidad del producto y lo hace con probabilidad p, la demanda mensual puede ser descrita con una distribución Binomial(N,p). Por lo tanto:

$$P[\text{Demanda} = k] = \alpha_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad \forall k \in \{1, ..., N\}$$

2. Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades la tienda pide $T-n$ unidades, las que llegaran al inicio del siguiente mes. No obstante, durante el mes el nivel n se ve reducido por la demanda que observa la tienda. De esta manera, si la demanda en el mes es de k unidades, al inicio del siguiente mes el nivel de inventario será $\min\{n-k, 0\} + (T-n)$ unidades. Notamos que a lo más puedo vender la cantidad que está en inventario (no existen ventas pendientes).

   Sea P_{ij} La probabilidad de comenzar un mes con j unidades si al comienzo del mes anterior tenia i unidades en inventario. Entonces $\forall i,\, j \in \{0, ..., T\}$

$$P_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & j < T-i \\ \alpha_{i+} = \sum_{k=i}^{N} \alpha_k & si & j = T-i \\ \alpha_{T-j} & si & j > T-i \end{array} \right.$$

3. Para identificar la cadena de Markov simplemente necesitamos especificar cuales son los estados de la misma e identificar la matriz de transición. Claramente los estados son:

$$X_i = \text{Inventario al comienzo del mes es de i unidades} \qquad i \in \{0, ..., T\}$$

   Es decir T+1 estados. Las componentes de la matriz de trancisión son las calculadas en el punto anterior.

   Otra forma de especificar la cadena era bosquejar el grafo asociado. Sin embargo para que dicho grafo se encuentre completamente correcto debe incluir una transición genérica entre los estados i y j.

Esta Cadena de Markov es finita y está definida por una única clase recurrente aperiódica (ergódica e irreductible). Para ver esto notamos que desde el estado x_T podemos acceder a cualquier otro estado y que desde cada estado puedo acceder a x_T (entonces existe solo una clase). Vemos que es aperíodico puesto que la transición desde x_T a x_T tiene probabilidad no nula. Dados estos argumentos podemos asegurar la existencia de probabilidades estacionarias.

4. Debemos incluir información acerca si existen pedidos que no llegaron al comienzo de la semana en cuestión. Más aun debemos incluir cuantos productos no llegaron debido a un retraso y que por lo tanto se encontraran con seguridad disponibles al comienzo de la próxima semana.

5. Para identificar la cadena de Markov debemos especificar los estados de la misma e identificar la matriz de transición asociada. Los estados son:

$$x_{i,j} = \text{i unidades al comienzo del mes en bodega y j unidades llegaran con seguridad al comienzo del próximo mes} \qquad \forall i,j \in \{\mathbb{N}^2 | j+i \leq T\}$$

En este caso los elementos de la matriz de transición toman la siguiente forma $(i,j,l,k \in \mathbb{N} \quad | i+j \leq T \wedge l+k \leq T)$

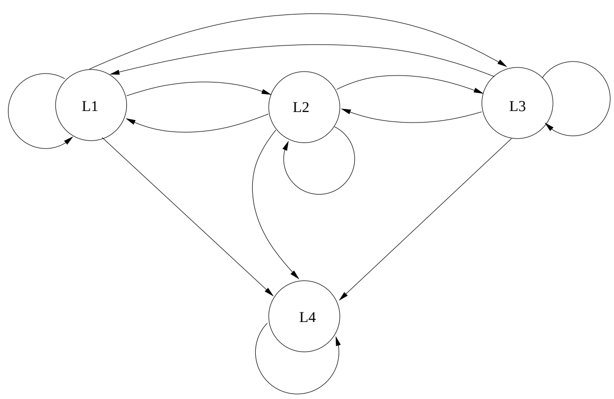
$$P_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} 0 & si \quad (k < T-i \wedge l = 0) \vee (k < j \wedge l = T-i-j) \\ & \quad \vee (l \neq T-i-j \wedge l \neq 0) \\ q \cdot \alpha_{i+} = & si \quad k = j \wedge l = T-i-j \\ (1-q) \cdot \alpha_{i+} = & si \quad k = T-i \wedge l = 0 \\ q \cdot \alpha_{i+j-k} & si \quad k < j \wedge l = T-i-j \\ (1-q) \cdot \alpha_{T-k} & si \quad k < T-i \wedge l = 0 \end{cases}$$

6. La esperanza del costo fijo simplemente es (supongo que pago el costo cuando ordeno):

$$E[Costo] = B \cdot \left[\sum_{i,j|i+j<\frac{T}{2}} \pi_{i,j} \right] + A \cdot \left[\sum_{i,j|i+j\geq\frac{T}{2}} \pi_{i,j} \right]$$

Problema 3

1. La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:



Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

- {L1, L2, L3}: clase transiente.
- {L4}: clase recurrente aperiódica.

La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2, L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\ \frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\ \frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

2. Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo "ergódica más transiente" (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica).

   Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:

   $$\pi = [0, 0, 0, 1] .$$

   De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Mandinga irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

Para lo que sigue hay, al menos, dos maneras de modelar los costos (y cualquiera de ellas conduce a los mismos resultados).

- Primera forma:

  Asignamos a cada estado el costo de la entrada y a cada transición del tipo "quedarse en el mismo estado" el valor del descuento. Es decir, $r_i := E$ y $r_{ii} := -F$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$; $r_{ij} := 0$ para i distinto de j.

- Segunda forma:

  Asignamos costos nulos a cada estado y manejamos los costos de las entradas vía las transiciones. Es decir, $r_i := 0$ y y $r_{ii} := E - F$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$; $r_{ij} := E$ para i distinto de j.

En ambos casos se obtiene que:

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} E - p_1 F \\ E - p_2 F \\ E - p_3 F \\ E - F \end{bmatrix} .$$

3. $g = \pi\ \hat{r} = E - F$. En nuestro caso, esto nos dice que, en el estado estacionario, Mandinga pagará la entrada con descuento (esto lo podemos concluir también del hecho que sabemos que en el estado estacionario siempre irá al mismo local).

4. Para obtener W, fijamos $W_4 = 0$ (estamos basándonos en el estado recurrente) y resolvemos el sistema:

   $$W + ge = \hat{r} + PW .$$

Con los datos que tenemos, esto se reduce a determinar $W_T = [W_1, W_2, W_3]^\top$, resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{bmatrix} W_T = \begin{bmatrix} 0,6D \\ 0,6D \\ 0,3D \end{bmatrix},$$

cuya solución es $W_T = [3D, 3D, 3D]^\top$.

Esto puede interpretarse como que Giusseppe irá, en media, a tres espectáculos que no le gusten (cambios de local entre una semana y la siguiente, por los cuales pierde los descuentos) antes de ir al local "L4".

A partir de esto, y sin cálculos adicionales, no podemos concluir cuánto tiempo le llevará descubrir este local (no tenemos información de cuántas veces, en media, le gustará el espectáculo de los otros locales).

5. **Bonus.** Basta verificar que el vector $W_T = [3D, 3D, 3D]^\top$, satisface

$$\begin{bmatrix} 1-p_1 & -\frac{1-p_1}{3} & -\frac{1-p_1}{3} \\ -\frac{1-p_2}{3} & 1-p_2 & -\frac{1-p_2}{3} \\ -\frac{1-p_3}{3} & -\frac{1-p_3}{3} & 1-p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3D \\ 3D \\ 3D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p_1)D \\ (1-p_2)D \\ (1-p_3)D \end{bmatrix},$$

lo que es cierto.

También se podría tratar de resolver el sistema correspondiente con la matriz genérica y ver que se obtiene el mismo vector W_T, pero esto es más difícil.

Dudas, consultas y comentarios a
dsaure@dii.uchile.cl