Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Antoine Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

Control 2 IN44A, Viernes 16 de Mayo del 2003

Problema 1

El lanzamiento del último modelo de una conocida marca de automóviles ha revolucionado el mercado nacional. Armijo Catalan, dueño de la franquicia de dicha marca, cuenta con un stock limitado de C de estos bólidos. Nuestro amigo, consciente del impacto de una buena política de precios en la rentabilidad del negocio ha decidido cobrar un precio de $P(i)$[u.m.] por la venta del i-ésimo automóvil, esto es el primer auto se venderá en P(1)[u.m.], el segundo se venderá en P(2)[u.m.], etc.

Armijo ha estudiado largamente la demanda por automoviles de última generación y estima que la llegada de clientes con intenciones de comprar uno de estos se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa λ[Clientes/hora].

Armijo sabe que Z_k (el máximo precio que el k-ésimo cliente en llegar esta dispuesto a pagar) es una variable aleatoria de distribución común F. De esta forma el k-ésimo cliente en llegar solo comprará un bólido si el precio de venta es menor o igual a su precio de reserva Z_k.
Sea $Q(t)$ el proceso de conteo de autos vendidos hasta el instante t.

1. (1,0 ptos.) Argumente el porque $Q(t)$ no un proceso de Poisson homogéneo ¿Cual es la esperanza de x_1, tiempo transcurrido hasta la venta del primer automóvil?
2. (1,0 ptos.) Si el primer automóvil se vende en el instante $x_1 = s$, ¿cual es la esperanza del número de clientes que han llegado a la automotora hasta ese instante?.
3. (1,0 ptos.) Calcule la esperanza del tiempo transcurrido hasta que todos los autos son vendidos.
4. (1,5 ptos.) Encuentre P[Q(t)=1]

Armijo Catalan desea que ninguno de sus clientes se vaya con las manos vacías por lo que les ofrece gratis un precioso bolígrafo. Un cliente que llega a la automotora (independiente de si compra o no) aceptará el lápiz con probabilidad q. Suponiendo que Armijo cuenta con muchos bolígrafos, responda:

6. (1,5 ptos.) Si hasta t se han llevado n lápices, ¿Cual es la probabilidad que el primer auto ya haya sido vendido?
7. (Bonus, 1,5 ptos.) Encuentre la distribución de x_1, el instante de la primera venta, condicional en que $Q(t) = 1$.[1] Con esto encuentre la esperanza del número de clientes que han visitado la automotora hasta el instante t condicional en que se ha vendido tan solo 1 automóvil.

Problema 2

Considere una tienda que distribuye un único producto, muy exclusivo, a N clientes . Para otorgarles un buen nivel de servicio mantiene unidades de este producto almacenadas, siendo administradas mediante un Sistema de Revisión Periódica Mensual.

[1]Utilice que $P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] = P[Q(s) = 1 | Q(t) = 1]$

De esta manera al comenzar cada mes la tienda revisa el nivel de inventario, n, que considera las existencias en la tienda, y pide a su proveedor una cantidad $T - n$ de unidades ($0 \leq n \leq T$), donde T corresponde al nivel de inventario objetivo ($T \leq N$). La cantidad pedida demora exactamente un mes en llegar, es decir, estará disponible al comienzo del siguiente mes (antes de hacer el pedido).

1. (1.0 ptos.) Suponga que, independiente de todo, cada cliente mensualmente puede demandar sólo una unidad del producto, y que lo hace con probabilidad p. ¿Con qué probabilidad la tienda ve una demanda mensual igual a k unidades? Llame a esta probabilidad α_k ($0 \leq k \leq N$).

2. (1.0 ptos.) Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades, ¿en qué estados se podrá encontrar el sistema al inicio del siguiente mes? ¿qué probabilidades tienen asociadas las transiciones posibles?

   Indicación: Considere que la demanda insatisfecha se pierde.

3. (1.0 ptos.) Utilizando las probabilidades calculadas en las partes anteriores, modele el nivel de inventario de la tienda al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

Suponga ahora que con probabilidad q la cantidad pedida en un mes cualquiera requiere un mes adicional para su llegada a la tienda.

4. (0.5 ptos.) ¿Qué información adicional debe incorporarse a los estados definidos anteriormente para representar el nuevo escenario del sistema como una Cadena de Markov?

5. (1.5 ptos) Para el nuevo escenario, modele el sistema al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

6. (1.0 ptos.) Considere conocidas las probabilidades estacionarias para la cadena de la parte anterior, y suponga que la estructura del costo fijo de pedido al inicio de cada mes está dada por la siguiente expresión:

$$C(n) = \begin{cases} A & si \quad n \leq T/2 \\ B & si \quad n > T/2 \end{cases}$$

   Determine el costo fijo de pedido esperado en el largo plazo.

Problema 3

Giusseppe Mandinga, un dedicado estudiante de nuestra escuela, está preocupado con el estrés que le está produciendo tanto estudio este semestre. Para mantener su salud, ha decidido dedicar las noches de los viernes para salir y "ventilar la mente". Para ello ha elegido cuatro locales de entretención nocturna de una conocida zona de Santiago. Los locales que ha elegido son "L1", "L2", "L3" y "L4".

Según información que nos proporcionó un amigo cercano, Giusseppe decide a qué local dirigirse cada fin de semana de acuerdo a los siguientes criterios:

- Si el show de la semana anterior le gustó, este viernes se dirige al mismo local.

- Si el espectáculo al que acudió la semana anterior no le gustó, este semana concurrirá a otro local. En este caso el próximo local a visitar (de los tres posibles) es escogido equiprobablemente.

Además, nuestro informante nos comentó, a partir de su experiencia como compañero de salidas de Mandinga, que él sale satisfecho del local "Li" con una probabilidad p_i, que es igual todas las semanas e independiente de todas las salidas anteriores. En particular, nos garantiza con certeza absoluta que el espectáculo de "L4" le gustará a Giusseppe siempre (es decir $p_4 = 1$).

1. (2,0 ptos.) Construya una cadena de Markov que represente las salidas de los viernes de Giusseppe Mandinga. Construya un grafo que la represente. Identifique las clases de estados de esta cadena y clasifíquelas en transientes y recurrentes. Para las clases recurrentes determine el período de cada una. Identifique las probabilidades de transición entre estados.
2. (1,0 ptos.) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas. ¿Podemos afirmar, que a partir de algún momento, Mandinga concurrirá todas las semanas a mismo local? En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos lo hará? Justifique.

Considere ahora que las entradas en cualquiera de los cuatro locales mencionados tienen un valor \$$E$ y que todos los locales tienen la política de realizar un descuento de valor \$$F$ si es presentada una entrada de la semana anterior (i.e. Giusseppe se gana un descuento si concurre dos semanas seguidas al mismo local).

3. (0,5 ptos.) Determine el costo asociado a una transición en el estado estacionario. ¿Qué interpretación tiene este valor en nuestro caso?
4. (2,5 ptos.) Suponiendo que las probabilidades de que un espectáculo le guste a Giusseppe en los locales "L1", "'L2" y "L3" son $p_1 = p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,7$, respectivamente, determine un vector asintótico de beneficios relativos (W). Interprete el resultado obtenido.
   A partir de estos valores, y sin cálculos adicionales, ¿es posible determinar cuántas semanas, en promedio, Mandinga deberá esperar para descubrir el local en el que siempre le gustará el espectáculo?
5. (Bonus, 1,0 pto.) Demuestre que el vector asintótico de beneficios relativos obtenido en el punto anterior no depende de las probabilidades p_1, p_2, p_3 cuando se fija W_4 en 0. O sea, el vector obtenido es el mismo para p_1, p_2 y p_3 elegidos arbitrariamente entre 0 y 1.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.
  $X \rightsquigarrow \mathrm{U}[a,b]$: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\ \forall\, x \in [a,b]$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}\cdot(b-a)^2$
  $X \rightsquigarrow \mathrm{EXP}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \forall\, x \geq 0$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  $X \rightsquigarrow \mathrm{Poisson}(\lambda)$: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $\mathrm{Var}(X) = \lambda$
  $X \rightsquigarrow \mathrm{Binomial}(N, p)$: $\Pr[X = k] = \binom{N}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$ $E(X) = N\cdot p$
  $\mathrm{Var}(X) = N\cdot p\cdot(1-p)$
  $X \rightsquigarrow \mathrm{Geométrica}(p)$: $\Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k$ $E(X) = \frac{p}{1-p}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$
- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.