Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut
Aux : C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

# Solución Tarea 2
## Fecha entrega: 4 de Abril, 2004

## Problema 1

- **Etapas**:

  Cada uno de los períodos del horizonte de evaluación, $t$=1,...,T

- **Variables de Estado**:

  $S_t$ = Stock al principio del período t.
  $R_t$ = Producción del período $t-1$ (para calcular el costo de suavización).
  $Q_t$ = Demanda instatisfecha del período $t-1$ (para sumarla a la demanda del período t).

- **Variable de Decisión**:

  $x_t$ = Cantidad a producir en el período t.

- **Recurrencias**:

$$S_{t+1} = \text{máx}\{S_t + x_t - (d_t + Q_t), 0\}$$

$$R_{t+1} = x_t$$

$$Q_{t+1} = \text{máx}\{(d_t + Q_t) - (S_t + x_t), 0\}$$

- **Función de Beneficio**:

$$V_t(S_t, R_t, Q_t, x_t) = U_t + V^*_{t+1}(S_{t+1}, R_{t+1}, Q_{t+1})$$

  Donde:

$$U_t = c_t(x_t) + A \cdot |x_t - R_t| + h_t \cdot \text{máx}\{S_t + x_t - (d_t + Q_t), 0\} + I_t \cdot \text{máx}\{(d_t + Q_t) - (S_t + x_t), 0\}$$

$$V_t^*(S_t, R_t, Q_t) = \min_{x^t}\{V_t(S_t, R_t, Q_t, x_t)\}$$

- **Condiciones de Borde**:

$$H_{T+1} = 0^1$$
$$V_{T+1}(S_{T+1}, R_{T+1}, Q_{T+1}) = 0$$
$$S_1 = S_1$$
$$R_1 = x_0$$

## Problema 2

- **Etapas**:

  Cada uno de los períodos del horizonte de evaluación, $t$=1,...,T

- **Variable de Estado**:

  $S_t$ = Nivel de agua del embalse al comienzo del período t.

- **Variable de Decisión**:

  $O_t$ = Volumen de agua que se vende a la central en el período t.

- **Variable Aleatoria**:

  $W_t$ = Volumen de aguas lluvia caída durante el período t [2].

- **Recurrencia**:

$$S_{t+1} = \max\{\min\{K, S_t + W_t - O_t\}, 0\}$$

- **Función de Beneficio**:

$$E_{W_t}[V_t(S_t, O_t)] = C \cdot O_t - \sum_{n=0,M,2M} P_n \cdot [W \cdot \max\{O_t - (S_t + n), 0\} + V_{t+1}^*(\max\{\min\{K, S_t + n - O_t\}, 0\})]$$

  Donde:

$$V_t^*(S_t) = \max_{O_t \geq Q}\{E_{W_t}[V_t(S_t, O_t)]\}$$

[1] Suponiendo que es indeseable debido a que es muy caro

[2] Supuesto: El agua caída durante un período puede ser utilizada para satisfacer demanda del mismo período y/o de períodos posteriores

- **Condiciones de Borde**:

$$V_{T+1}(S_{T+1}) = 0$$
$$S_1 = R$$

**Problema 3**

1. Consideremos un paradero genérico $k$. Si el chofer se detiene $S$ se bajaran con seguridad, sin embargo cada una de las $R - S$ personas que están arriba del bus pueden decidir bajarse con probabilidad $b_k$. Entonces, identificando a cada una de estas personas como una moneda y la probabilidad $b_k$ como la probabilidad de una cara vemos que:

$$P[\text{Se bajen i+S personas}] = \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \quad \forall\, i \in \{0, 1, ..., R-S\}$$

2. Si i personas se bajan ($i \in \{0, 1, ..., R\}$) entonces quedan $C - R + i$ asientos disponibles en el bus. En el paradero k hay $d_k$ personas que desean subirse. Debido a la capacidad limitada del bus el número de pasajeros que sube es:

$$X(i)^* = \min\{d_k, C - R + i\}$$

Nuevamente, cada uno de estas personas (las que se suben) es escolar con probabilidad $q_k$. Entonces procediendo como en el punto anterior vemos que:

$$P[\text{Suben j escolares}|\text{Bajan i }] = \binom{X(i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(i)^*-j} \quad \forall\, j \in \{0, ..., \min\{d_k, C-R+i\}\}$$

3. Bajo estas condiciones las ganancias por venta de pasajes en el paradero k serán:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas}] &= \sum_{i=0}^{R-S} E[\text{Ventas}|\text{S + i}] P[\text{Bajan S + i}] \\ &= \sum_{i=0}^{R-S} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}] \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}] &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}|\text{Suben j escolares}] P[\text{Suben j escolares}] \\ &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}|\text{Suben j escolares}] \binom{X(S+i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(S+i)^*-j} \\ &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} [T_E \cdot j + T_A \cdot (X(S+i)^* - j)] \binom{X(S+i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(S+i)^*-j} \\ &= X(S+i)^* [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas}] &= \sum_{i=0}^{R-S} X(S+i)^* [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)] \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \\ &= \sum_{i=0}^{R-S} \min\{d_k, C-R+S+i\} [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)] \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \end{aligned}$$

4. Si no se detiene el único costo posible es el asociado a que un carabinero lo pare. Entonces, si supongo que las personas que deseaban bajarse por primera vez en ese paradero no están indignadas (y no reclaman una indemnización):

$$
\begin{aligned}
E[\text{Costos}] &= E[\text{Costos}|\text{lo detienen}] \cdot r + E[\text{Costos}|\text{no lo detienen}] \cdot (1-r) \\
&= -(S \cdot I + M) \cdot r
\end{aligned}
$$

5. Seguiremos la metodología tradicional.

   - Etapas:

     Cada uno de los paraderos, $k \in \{1, ..., K\}$.
   - Estados:

     $R_k$ = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero $k$.

     $S_k$ = Número de pasajeros que deseaban bajarse en el paradero $k-1$ .

   - Decisión:

     $X_k = \begin{cases} 1 & \text{sí el chofer decide detenerse en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$
   - Variables aleatorias:

     $i_k$ = Número de personas que desearán bajarse por primera vez en el paradero $k$.

     $j_k$ = Número de escolares que abordan el bus en el paradero $k$.

     $l_k = \begin{cases} 1 & \text{sí le sacan una multa en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$
   - Recurrencias:

$$P_{k+1} = X_k \cdot \text{mín}\{C, P_k - S_k - i_k + d_k\} + (1 - X_k) \cdot P_k(1 - l_k)$$
$$S_{k+1} = (S_k + i_k) \cdot (1 - l_k) \cdot (1 - X_k)$$

   - Función de beneficios:
     Para el último período ideo un paradero imaginario $K+1$ donde la función de costos es el neutro aditivo.

$$V_{K+1}(P_{K+1}, S_{K+1}) = 0$$

     Para el resto de los paraderos la función de beneficios es la siguiente.

$$V_k^*(P_k, S_k) = \text{máx}\{V_k(P_k, S_k, 1), V_k(P_k, S_k, 0)\}$$

     Donde:

$$
\begin{aligned}
V_k((P_k, S_k, 1) &= \sum_{i=0}^{P_k - S_k} [\text{mín}\{d_k, C - P_k + S_k + i\}[(T_E - E_k) \cdot q_k + T_A \cdot (1 - q_k)] \\
&\quad + V_{k+1}^*(\text{mín}\{C, P_k - S_k - i + d_k\}, 0)] \cdot \binom{P_k - S_k}{i} b_k^i (1 - b_k)^{P_k - S_k - i}
\end{aligned}
$$

y

$$V_k((P_k,S_k,0) = \sum_{i=0}^{P_k-S_k}\Big[r\cdot(-M-I\cdot S_k+V^*_{k+1}(P_{k+1},S_{k+1})) + (1-r)\cdot V^*_{k+1}(P_{k+1},S_{k+1})\Big]\cdot\binom{P_k-S_k}{i}b_k^i(1-b_k)^{P_k-S_k-i}$$

con $S_{k+1}=S_k+i$

- Condiciones de borde:

  $S_1=0$ (al comienzo nadie quiere bajar, de hecho el bus esá vacío)

  $P_1=0$ (el bus parte vacío)

  $X_K=1$ (obligatoriamente paro en el último paradero)

**Problema 4**

1. Basta con calcular la esperanza de las utilidades recibidas en k, teniendo en cuenta que $b_k$ es una v.a.:

$$E(Ut_k)=\int_0^\infty \sqrt{a_k+y\cdot G}\cdot f_{b_k}(y)dy$$

2. - **Etapas**:

     Cada una de las semanas del horizonte de evaluación, $k$=0,...,T

   - **Variable de Estado**:

     $S_k$ = Cantidad de dinero disponible al comienzo de la semana k.

   - **Variable de Decisión**:

     $x_k$ = Cantidad de dinero a gastar en semana k.

   - **Variable Aleatoria**:

     $b_k$ = Variable que modela el hecho de no saber todas las actividades a realizar en la semana.

   - **Recurrencia**:

$$S_{k+1}=S_k-x_k$$

- **Función de Beneficio**:

$$E_{b_k}[V_k(S_k, x_k)] = \int_0^\infty \sqrt{a_k + y \cdot G} \cdot f_{b_k}(y)dy + V_{k+1}^*(S_k - x_k)$$

Donde:

$$V_k^*(S_k) = \max_{0 \leq x_k \leq S_k} \{E_{b_k}[V_k(S_k, x_k)]\}$$

- **Condiciones de Borde**:

$$V_{T+1}(S_{T+1}) = 0$$
$$S_0 = M$$