Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 26 de Abril, 2004

Problema 1

Consideremos que la familia ya definió cuál será el orden en que visitará las ciudades (si efectivamente decide visitarlas). En dicho caso, una etapa estará en relación unívoca con una ciudad (Cada ciudad es una etapa y se pasará a la siguiente etapa cuando se pase a la siguiente ciudad). Además, el estado vendrá dado por el número de días que le restan a la familia para completar el total de días disponibles [1]. Así, podemos definir:
x_i = Número de días en la ciudad i (variable de decisión de la etapa i)

y_i = Número de días sobrantes después de visitar la ciudad $i-1$ ó justo antes de visitar la ciudad i (variable de estado).

Analicemos las ecuaciones recursivas:

- **Condición de borde (última etapa):**
  En este caso habremos visitado las ciudades $1, 2, \ldots, n-1$ y tendremos y_n días disponibles para usar (dependiendo de cuántos días hayamos decidido quedarnos en las ciudades anteriores, y_n puede tener varios valores posibles.

  Luego, el problema a resolver viene dado por:

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= \text{máx } g_n(x_n) \\ & \quad s.a \quad 0 \le x_n \le y_n \\ & \quad x_n \text{ entero} \\ &= \text{valor de la política óptima de estadía en la ciudad n si la familia} \\ & \quad \text{ya ha visitado n-1 ciudades y aún dispone de } y_n \text{ días disponibles} \end{aligned}$$

- **Recursión genérica k:**
  En este caso habremos visitado las ciudades $1, 2, \ldots, k-1$ y nos quedan por visitar las ciudades $k, k+1, \ldots, n$ siendo y_k el número de días que aún nos quedan disponibles. Luego nuestro problema a resolver será encontrar el número de días a permanecer en la ciudad k de modo de maximizar el beneficio de actual más el beneficio de visitar las próximas ciudades suponiendo que de ahora en adelante tomaremos las decisiones óptimas dado los días que nos quedarán luego de tomar nuestra decisión hoy:

$$\begin{aligned} V_k(y_k) &= \text{máx}\{g_k(x_k) + V_{k+1}(y_k - x_k)\} \\ & \quad s.a \quad 0 \le x_k \le y_k \\ & \quad x_n \text{ entero} \\ &= \text{satisfacción total óptima por visitar a las ciudades } k, k+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

  Finalmente el óptimo de la satisfacción de las vacaciones de la familia Sampson viene dado por:

$$V^\star = V_1(M)$$

Debemos resolver los problemas asociados a cada etapa partiendo desde la última [2], para cada uno de los posibles estados en que puede llegar el problema a la etapa en cuestión.

[1] También puede considerarse el número de días que ya han gastado
[2] Porque este es un problema que podremos resolver directamente sin necesitar los resultados de las próximas etapas

Para resolver cada uno de estos problemas haremos una enumeración explícita de los casos posibles para cada etapa y seleccionaremos la mejor [3].

- **Ciudad 3**:

y_3	$g_3(0)$	$g_3(1)$	$g_3(2)$	$g_3(3)$	$g_3(4)$	$g_3(5)$	$V_3^\star(y_3)$	x_3^*
0	0	i	i	i	i	i	0	0
1	0	1	i	i	i	i	1	1
2	0	1	3	i	i	i	3	2
3	0	1	3	3	i	i	3	2,3
4	0	1	3	3	2	i	3	2,3
5	0	1	3	3	2	1	3	2,3

i: infactible, es decir, la familia no puede quedarse esa cantidad de días porque ya no le quedan tantos.

- **Ciudad 2**:

$$\overbrace{\hspace{20em}}^{g_2(x_2)+V_3(y_2-x_2)}$$

y_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	$V_2^\star(y_2)$	x_2^*
0	0+0	i	i	i	i	i	0	0
1	0+1	1+0	i	i	i	i	1	0,1
2	0+3	1+1	4+0	i	i	i	4	2
3	0+3	1+3	4+1	6+0	i	i	6	4
4	0+3	1+3	4+3	6+1	8+0	i	8	4
5	0+3	1+3	4+3	6+3	8+1	8+0	9	4,3

i: infactible, es decir, la familia no puede quedarse esa cantidad de días porque ya no le quedan tantos.

- **Ciudad 1**:

En este caso, como sabemos que inicialmente (antes de visitar la primera ciudad), la familia dispone de 5 días para sus vacaciones, solo analizamos el caso $y_1 = 5$

$$\overbrace{\hspace{20em}}^{g_1(x_1)+V_2(y_1-x_1)}$$

y_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$V_1^\star(y_1)$	x_1^*
5	0+9	1+8	2+6	3+4	4+1	5+0	9	0,1

Finalmente existen 3 soluciones óptimas, todas con beneficio óptimo =9, cuyas estadías en cada ciudad viene dadas por:

Solución	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Itinerario 1	0	3	2
Itinerario 2	0	4	1
Itinerario 3	1	4	0

[3] En un problema general no se resolverá de forma tan ineficiente, sino que se recurrirá a otras técnicas: Simplex, Branch & Bound, métodos de descenso, etc.

Problema 2

1. En este punto se deben incluir argumentos como: Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.

2. De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

   - **Etapas**:
     Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
   - **Variables de estado**:
     S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
   - **Variables de decisión**:
     X_m, el número de botones asignados al barrio m.
   - **Recurrencia de estados**:

     $$S_{m+1} = S_m - X_m$$

   - **Función de beneficios**:

     $$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

     Donde:

     $$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

   - **Condiciones de borde**:

     $$V^*_{M+1}(\%) = 0$$
     $$S_1 = K$$

3. Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

   - **Etapas**:
     Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
   - **Variables de estado**:
     S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
   - **Variables de decisión**:
     X_m, el número de botones asignados al barrio m.
   - **Recurrencia de estados**:

     $$S_{m+1} = S_m - X_m$$

   - **Función de beneficios**:

     $$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) - r_m \cdot \max\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \max\{0, L_m - X_m\} + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

     Donde:

     $$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde**:

$$
\begin{aligned}
V^*_{M+1}(\%) &= 0 \\
S_1 &= K
\end{aligned}
$$

4. De acuerdo al punto anterior y a los datos provistos en el enunciado tendremos que:

   Para **m=3**:

S_3	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	V_3^*	x_3^*
0	-40	-	-	-	-	-	-40	0
1	-40	30	-	-	-	-	30	1
2	-40	30	70	-	-	-	70	2
3	-40	30	70	80	-	-	80	3
4	-40	30	70	80	80	-	80	4
5	-40	30	70	80	80	90	90	5

   Para **m=2**:

S_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	V_2^*	x_2^*
0	-70	-	-	-	-	-	-70	0
1	0	-35	-	-	-	-	0	0
2	40	35	5	-	-	-	40	0
3	50	75	75	35	-	-	75	1,2
4	50	85	115	105	55	-	115	2
5	60	85	135	145	125	80	145	3

   Para **m=1**:

S_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	V_1^*	x_1^*
5	125	150	145	130	95	30	150	1

   Entonces la estrategia es la siguiente:

   - Barrio 1: 1 Botones
   - Barrio 2: 2 Botones
   - Barrio 3: 2 Botones

   Esta estrategia consigue un total de 150 votos

Problema 3

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

- **Etapas**:
  - Cada uno de los meses del horizonte de planificación).
- **Variables de estado**:

$$S_i = \text{Número de productos disponibles al inicio del mes i}$$

$$\hat{S}_i = \text{Número de productos que llegaran el proximo més debido a atraso de ordenes}$$

- **Variables de decisión**:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ordeno productos para el próximo mes} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_i = \text{Número de productos que ordeno para el próximo mes}$$

- **Variable aleatoria**:

$$p = P[\text{Una orden se retrase un mes}]$$

$$q = P[\text{Un cliente demande una unidad de producto}]$$

- **Función de beneficio acumulado (incorpora recursión)**:
  - Etapa T+1:

$$V^{\star}_{T+1}(S_{T+1}, \hat{S}_{T+1}) = 0$$

  - Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i) &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} \Big[P \cdot \text{mín}\{S_i, n\} - b \cdot \text{máx}\{n - S_i, 0\} \\ &\quad + (1-p) \cdot [V^*_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + x_i + \hat{S}_i\}, 0)] \\ &\quad + p \cdot [V^*_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + \hat{S}_i\}, X_i)] \Big] \\ &\quad - K \cdot y_i - c \cdot x_i \end{aligned}$$

  Donde:

$$V^{\star}_i(S_i, \hat{S}_i) = \max_{0 \leq x_i \leq L \cdot y_i} [V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i)]$$

  - Condiciones de borde:

$$S_1 = S$$

$$\hat{S}_1 = 0$$

2. En este caso se debería incluir una variable de estado que nos indicase cuantos clientes se dejaron insatisfechos en el período anterior. De esta forma, para un período dado y condicionando sobre la demanda realizada, se puede tener el número de clientes insatisfechos durante el período. Con estas cifras se puede calcular la probabilidad de que el número de clientes insatisfechos dos meses continuos sea j, y por lo tanto, se podría modelar la situación e incluir los cambios las leyes de probabilidades de las demandas período a período.

3. Dados estos datos la solución es la siguiente[4]:

[4] i denota infactibilidad y d denota solución dominada

- Período 3:

S_3	$\hat{S}_3$	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$	$X_3 = 2$	V_3^*	X_3^*
0	–	0	−15	−20	0	0
1	–	11,25	−3,75	−8,75	11,25	0
2	–	23	8	3	23	0

- Período 2:

S_2	$\hat{S}_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	V_2^*	X_2^*
0	0	0	−6	−1,6	0	0
0	1	11,25	5,65	d	11,25	0
0	2	23	d	d	23	0
1	0	14,0625	8,1625	10,2125	14,0625	0
1	1	25,4375	17,4875	d	25,4375	0
1	2	34,25	d	d	34,25	0
2	0	26,375	18,325	15,675	26,375	0
2	1	i	i	i	i	i
2	2	i	i	i	i	i

- Período 1:

S_1	$\hat{S}_1$	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$	$X_1 = 2$	V_1^*	X_1^*
1	0	14,7656	12,9218	17,5125	17,5125	2

Dudas y/o errores:
José Guajardo
jguajard@ing.uchile.cl