Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A : Investigación Operativa
Profesores: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut
Auxiliares: M. Guajardo, J.Guajardo,
C. Berner, S. Hernandez

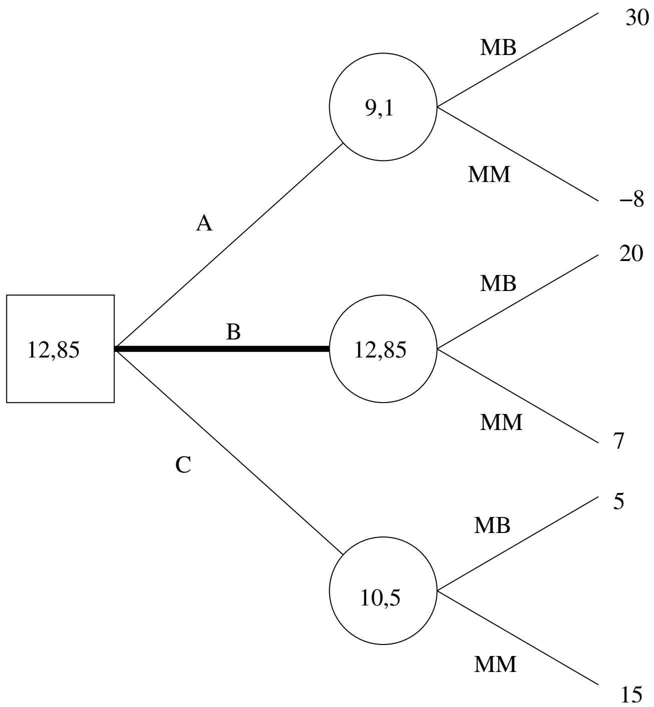
Pauta Control 1
Viernes 16 de Abril, 2004

Problema 1

En esta pauta utilizamos la siguiente notación para eventos:

$$\begin{array}{lcl} MB & := & \text{“Mercado Bueno”} \\ MM & := & \text{“Mercado Malo”} \\ EP & := & \text{“Estudio de mercado Prometedor”} \\ EN & := & \text{“Estudio de mercado Negativo”} \end{array}$$

1. El árbol de decisión que resulta es



   Del árbol, podemos concluir que la política de marketing más conveniente es la política B.

2. Para completar el árbol de este punto, se necesitan calcular algunas probabilidades que aún no son conocidas. Estas probabilidades son:

- $\mathbb{P}$(Estudio de mercado Prometedor):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(EP) &= \mathbb{P}(EP|MB)\times\mathbb{P}(MB)+\mathbb{P}(EP|MM)\times\mathbb{P}(MM)\\ &= 0,6\times 0,45+0,3\times 0,55\\ &= 0,435\end{aligned}.$$

  De aquí deducimos que $\mathbb{P}(EN)=0,565$.

- $\mathbb{P}$(Mercado Bueno | Estudio de mercado Prometedor):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(MB|EP) &= \frac{\mathbb{P}(EP|MB)\times\mathbb{P}(MB)}{\mathbb{P}(EP)}\\ &= \frac{0,6\times 0,45}{0,435}\\ &= 0,62\end{aligned}$$

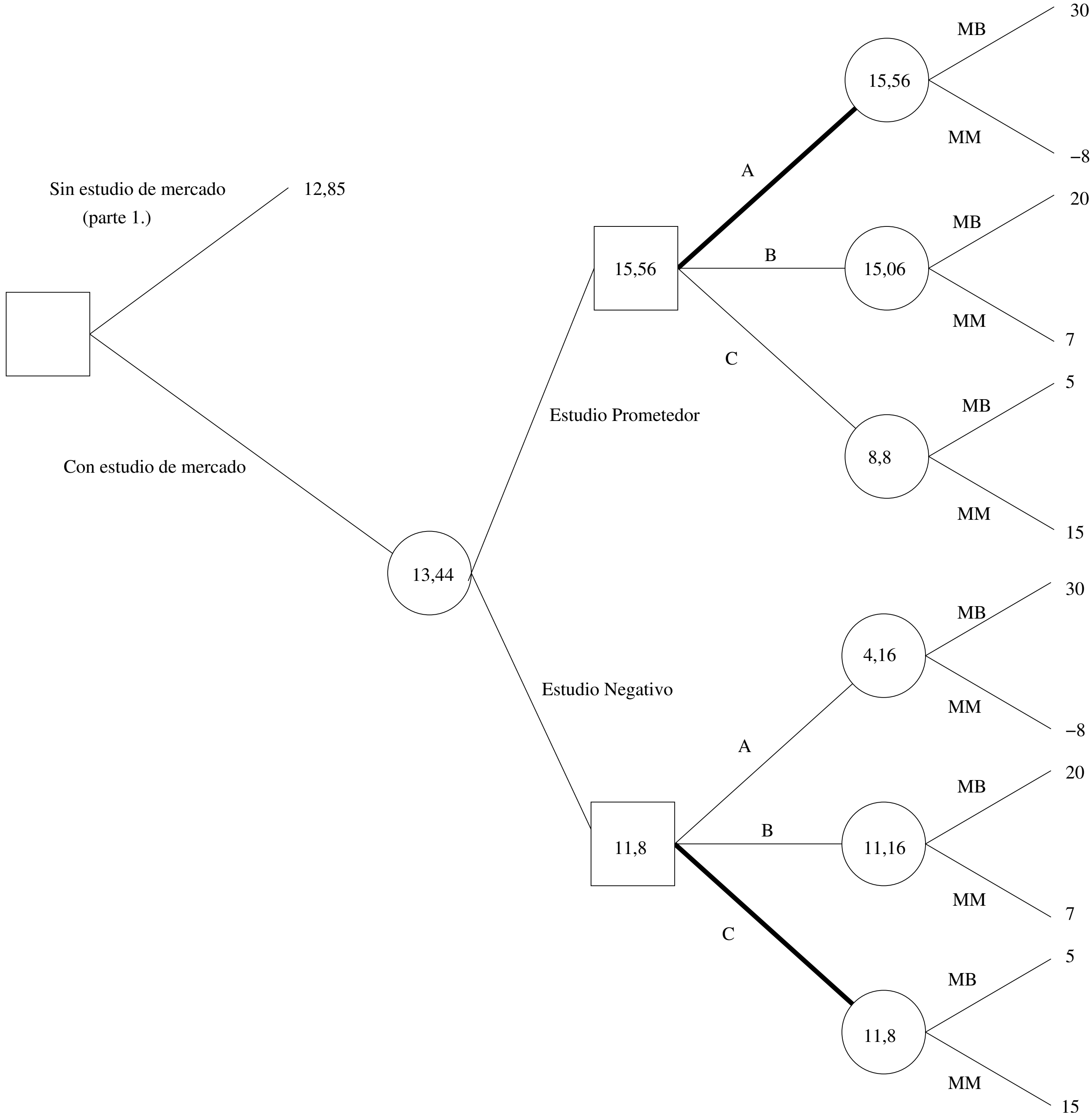
  y de aquí deducimos que $\mathbb{P}(MM|EP)=0,38$.

- $\mathbb{P}$(Mercado Bueno | Estudio de mercado Negativo):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(MB|EN) &= \frac{\mathbb{P}(EN|MB)\times\mathbb{P}(MB)}{\mathbb{P}(EN)}\\ &= \frac{0,4\times 0,45}{0,565}\\ &= 0,32\end{aligned}$$

  y de aquí deducimos que $\mathbb{P}(MM|EP)=0,68$.

El árbol que resulta está en la próxima página. De este árbol, vemos que el beneficio esperado realizando el estudio de mercado es de $13,44$ millones y por lo tanto el valor máximo que estaría dispuesto a pagar la empresa es de $13,44-12,85=0,59$ millones.


Sin estudio de mercado
(parte 1.)
12,85
Con estudio de mercado
13,44
Estudio Prometedor
15,56
A
B
C
15,56
MB
30
MM
−8
15,06
MB
20
MM
7
8,8
MB
5
MM
15
Estudio Negativo
11,8
A
B
C
4,16
MB
30
MM
−8
11,16
MB
20
MM
7
11,8
MB
5
MM
15

Problema 2

1. Si el candidato de la Alianza va arriba con k votos, la concertación tiene $N-k$ votos. Dado que van perdiendo la probabilidad que cada uno de ellos se cambie es $\frac{k}{N}$. La probabilidad que se cambien j será entonces:

$$R_C(k,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > j > N-k \\ \binom{N-k}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^j \cdot \left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-k-j} & \sim \end{cases}$$

Cada uno de los adherentes al candidato de la Alianza se cambiará con probabilidad q_a. La probabilidad que se cambien i será entonces:

$$B_A(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > i > k \\ \binom{k}{i} q_a^j \cdot (1-q_a)^{k-j} & \sim \end{cases}$$

2. La forma de la cadena es más o menos obvia, $N+1$ nodos donde el estado representa el número de personas apoyando al candidato de la alianza.

   Usaremos las prob. calculadas antes más las derivadas del caso cuando la concertación va ganando en las encuestas. Así las funciones que utilizaremos serán $R_A(i)$, $R_C(j)$ (que tienen la misma forma) y $B_A(i)$ y $B_C(j)$ calculadas con q_a y q_c respectivamente

   Las transciciones son posibles entre cada par de estado. Para calcular las prob. de transición condicionamos sobre el número de personas que votaban por la alianza y ahora se cambian a la concertacción. Claramente distinguimos sobre quien va ganando las encuestas para conocer las probabilidades de cambio individuales.

   El caso genérico es fácil de construir con las probabilidades calculadas en las partes anteriores. Si k personas votan actualmente por la alianza y i de ellas cambian de bando entonces para que finalmente h personas voten por la alianza es necesario que $N-k-(h-i)$ de las $N-k$ personas que votan por la concertación cambien de bando.

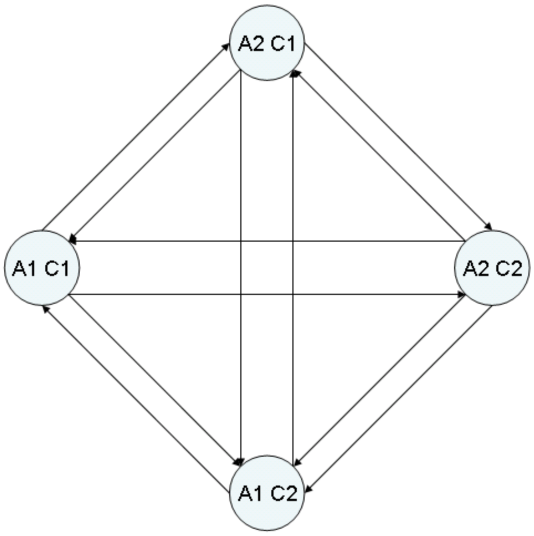
   - Caso 1: $k > n/2$ (Gana la alianza).

   $$P_{kh} = \sum_{i=0}^{k} R_A(i) \cdot B_C(N-k-(h-i))$$

   - Caso 2: $k < n/2$ (Gana la concertación).

   $$P_{kh} = \sum_{i=0}^{k} B_A(i) \cdot R_C(N-k-(h-i))$$

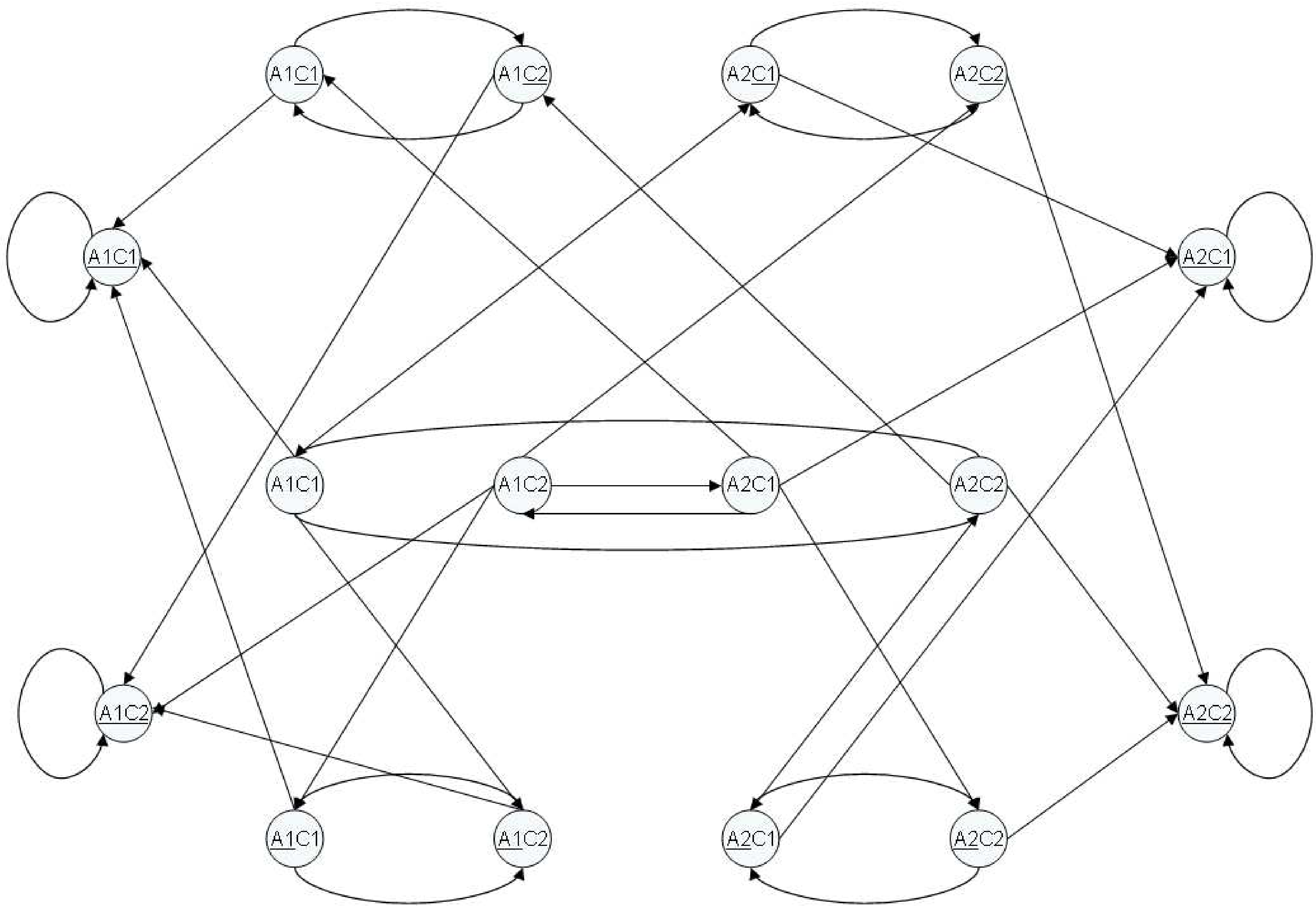
3. La cadena es la que se muestra a continuación:



La matriz de Transición es la siguiente (considerando los estados el siguiente orden: A1C1, A1C2, A2C1, A2C2 y denotando $P' = (1 - P)$)

$$\begin{pmatrix} P'_A(C1)P'_C(A1) & P'_A(C1)P_C(A1) & P_A(C1)P'_C(A1) & P_A(C1)P_C(A1) \\ P'_A(C2)P_C(A1) & P'_A(C2)P'_C(A1) & P'_A(C2)P'_C(A1) & P_A(C2)P'_C(A1) \\ P_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P_C(A2)) \\ P_A(C2)P_C(A2) & P_A(C2)P'_C(A2) & P'_A(C2)P_C(A2) & P'_A(C2)P'_C(A2) \end{pmatrix}$$

4. La cadena es la que se muestra a continuación (Cuando un candidato esta marcado significa que es candidato definitivo.):


A1C1
A1C2
A2C1
A2C2
A1C1
A2C1
A1C1
A1C2
A2C1
A2C2
A1C2
A2C2
A1C1
A1C2
A2C1
A2C2

Problema 3

1. *a*) Sí es una Cadena de Markov, pues el estado $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$ sólo depende de $Y_{n-1} = (X_{n-2}, X_{n-1})$

   b)
   $$P_{(i,j)(k,l)} = P(X_{n+1} = l, X_n = k / X_n = j, X_{n-1} = i)$$

   Si $j = l$ tenemos que:

   $$\begin{aligned} P_{(i,j)(k,l)} &= P(X_{n+1} = l, X_n = k / X_n = k, X_{n-1} = i) \\ &= \frac{P(Xn+1 = l, X_n = k, x-n-1 = i)}{P(X_n = k, X_{n-1} = i)} \\ &= P(X_{n+1} = l / X_n = k) \\ &= P_{kl} \end{aligned}$$

   Si $j \neq l$ tenemos que: $P_{(i,j)(k,l)} = 0$

2. *a*) La matriz de probabilidades de trancisión es:

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Por simetría $\pi_i = \frac{1}{5}$

   c) Para ver cuál es la probabilidad de que todas las posiciones sean visitadas antes de volver al estado inicial, hay que condicionar a la siguiente movida (ie, si me muevo hacia la derecha o hacia la izquierda). Si me muevo a la derecha la probabilidad es F_1, con prob. de ganar p y si me muevo a la izquierda la probabilidad de ganar es F_1, con prob. de ganar q. Luego se tiene que:

   $$P(\text{visitar todas la posiciones antes de volver al E. inicial}) = p \cdot \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - (\frac{q}{p})^4} + q \cdot \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - (\frac{p}{q})^4}$$

3. *a*) Por definición la cadena reversa es:

   $$\begin{aligned} Q_{ij} &= P(X_n = j / X_{n+1} = i) \\ &= \frac{P(X_n = j) \cdot P(X_{n+1} = i / X_n = j)}{P(X_{n+1} = i)} \\ &= \frac{\pi_j \cdot P_{ji}}{\pi_i} \end{aligned}$$

   Luego tenemos que:

   $$\begin{aligned} \pi_i \cdot Q_{ij} &= \pi_j \cdot P_{ji} \\ \sum \pi_i \cdot Q_{ij} &= \sum \pi_j \cdot P_{ji} \\ &= \pi_j \end{aligned}$$

   b) En la cadena reversa, la fracción del tiempo que el proceso está en el estado i es el mismo que en la cadena normal.