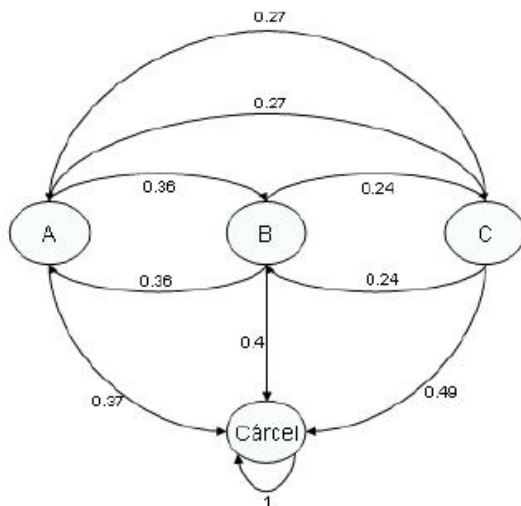




Solución Clase Auxiliar 20 de Abril, 2004

Problema 1

1. Para comenzar debemos ver cual es la forma de la cadena y especificar las probabilidades de transición. Estas son las que se ilustran arriba.



Adicionalmente debemos definir la estructura de costos asociada. Debería ser claro que:

$$r_A = 1000 \quad , \quad r_B = 3000 \quad , \quad r_C = 7000$$

$$r_{AB} = r_{BA} = -500 \quad , \quad r_{AC} = r_{CA} = -1000 \quad , \quad r_{BC} = r_{CB} = -2000$$

De esta forma:

$$\hat{r}_A = 550 \quad , \quad \hat{r}_B = 2340 \quad , \quad \hat{r}_C = 6250$$

Entonces ahora debemos resolver el sistema (ojo: notar que $g = 0$):

$$\vec{W} + \vec{0} = \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \\ 0 \end{pmatrix} + P \cdot \vec{W}$$

Eligiendo $W_{\text{Cárcel}} = 0$ tendremos que:

$$\vec{W}_T = (I - P_{TT})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \end{pmatrix}$$

Una vez conocido el valor de W utilizamos las formulas de Markov con beneficios:

$$\vec{V}_n = (n) \cdot 0 \cdot \vec{e} + \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + P^n \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

De este vector nos interesa la componente $V_n(A)$, dado que nos dicen que la condición inicial es partir en el país A.

Adicionalmente se nos pide el cálculo para $n=3$.

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2025 & 0,0648 & 0,0864 & 0,6463 \\ 0,0648 & 0,1872 & 0,0972 & 6,508 \\ 0,0864 & 0,0972 & 0,1305 & 0,6859 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 4081 \\ 5344 \\ 1016 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la respuesta es 4081.

- Reformulamos la pregunta: Cual es el tiempo esperado en el transiente partiendo desde B? A estas alturas sabemos que la respuesta es $W(B)$ donde \vec{W} es el vector que cumple con:

$$\vec{W} = [I - P_{TT}]^{-1} \cdot \vec{e}$$

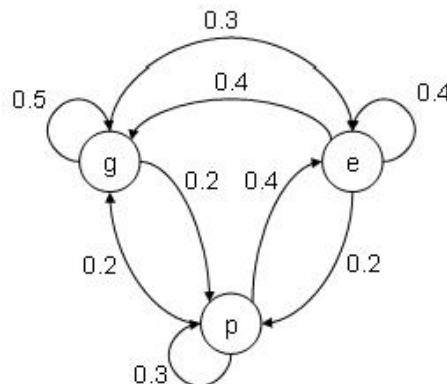
$$\text{Con } P_{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0,36 & 0,27 \\ 0,36 & 0 & 0,24 \\ 0,27 & 0,24 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Por lo tanto :}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2,4863 \\ 2,4365 \\ 2,2561 \end{pmatrix}$$

Y la respuesta es 2.4365.

Problema 2

Antes de responder las preguntas debemos determinar la estructura de la cadena. Los estados serán el resultado del partido de la semana. La cadena asociada se muestra en la figura.



1. La pregunta va orientada a definir una estructura de costos y ocupar las formulas de Markov con beneficios. Para esto definimos la siguiente estructura:

$$r_g = 3 \quad r_e = 1 \quad r_p = 0 \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Esto implica que:

$$\hat{r}_g = 3 \quad \hat{r}_e = 1 \quad \hat{r}_p = 0$$

Adicionalmente necesitaremos los valores de las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena irreducible de una clase recurrente aperiódica). Sin embargo si observamos P^{16} (en el enunciado) vemos que todas las filas son iguales por lo que podemos argumentar que ya convergió a su forma de estado estacionario, por lo que se puede decir que:

$$\pi_g = 0,42 \quad \pi_e = 0,36 \quad \pi_p = 0,22$$

De esta forma tendremos que

$$g = 3 \cdot 0,42 + 1 \cdot 0,36 = 1,62$$

Ahora debemos encontrar el valor de \vec{W} , que satisface:

$$\vec{W} + \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Imponiendo que $W_p = 0$ se tiene que:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces calculamos cuántos puntos se acumularán en 16 partidos (los restantes) si parto en el estado g :

$$\vec{v}(16) = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular nos interesa conocer $V_g(16)$. Esto es:

$$V_g(16) = 25,92 + 3,5\bar{6} + 0,42 \cdot 0,5\bar{6} - 0,36 \cdot 0,3\bar{4} \approx 30,1792$$

Entonces, si considero que ya llevaba un punto ganado, entonces espero juntar 31,1792 puntos en lo que queda de campeonato.

2. Ahora me preguntan por los puntos acumulados desde un partido empatado hasta 17 fechas más. Para calcular esto no debo cambiar la estructura de beneficios por lo que el W será el mismo de la parte anterior. También puedo asumir que $P^{16} = P^{17}$. Es por esto que tendremos que:

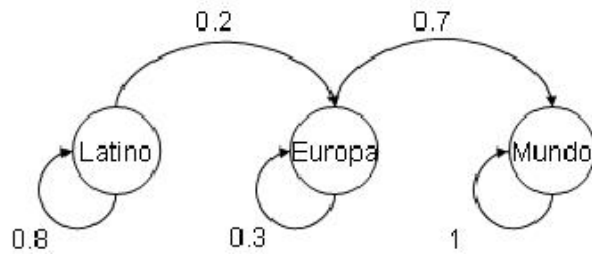
$$\vec{v}(17) = 17 \cdot \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular:

$$V_e(17) = 27,54 + 1,3\bar{4} + 0,42 \cdot 0,5\bar{6} - 0,36 \cdot 0,3\bar{4} \approx 29,572$$

que es lo que nos están pidiendo calcular (en este caso no sumo un punto adicional)

3. Si modelamos el estado de la carrera del técnico tendremos que la cadena asociada es la que se muestra el la figura.



Entonces, sólo debemos calcular w_{latino} utilizando la siguiente estructura de costos:

$$r_{latino} = r_{europa} = 1 \quad r_{mundo} = 0 \quad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Entonces \vec{W} debe cumplir con:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Si imponemos $W_{mundo} = 0$ tendremos que la segunda ecuación es:

$$W_{europa} = 1 + 0,3 \cdot W_{europa} \quad \Rightarrow \quad W_{europa} = \frac{10}{7}$$

Remplazando en la primera ecuación tendremos que:

$$W_{latino} = 6,42$$

Que es exactamente el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

Dudas y/o errores:
 Mario Guajardo
 mguajard@ing.uchile.cl