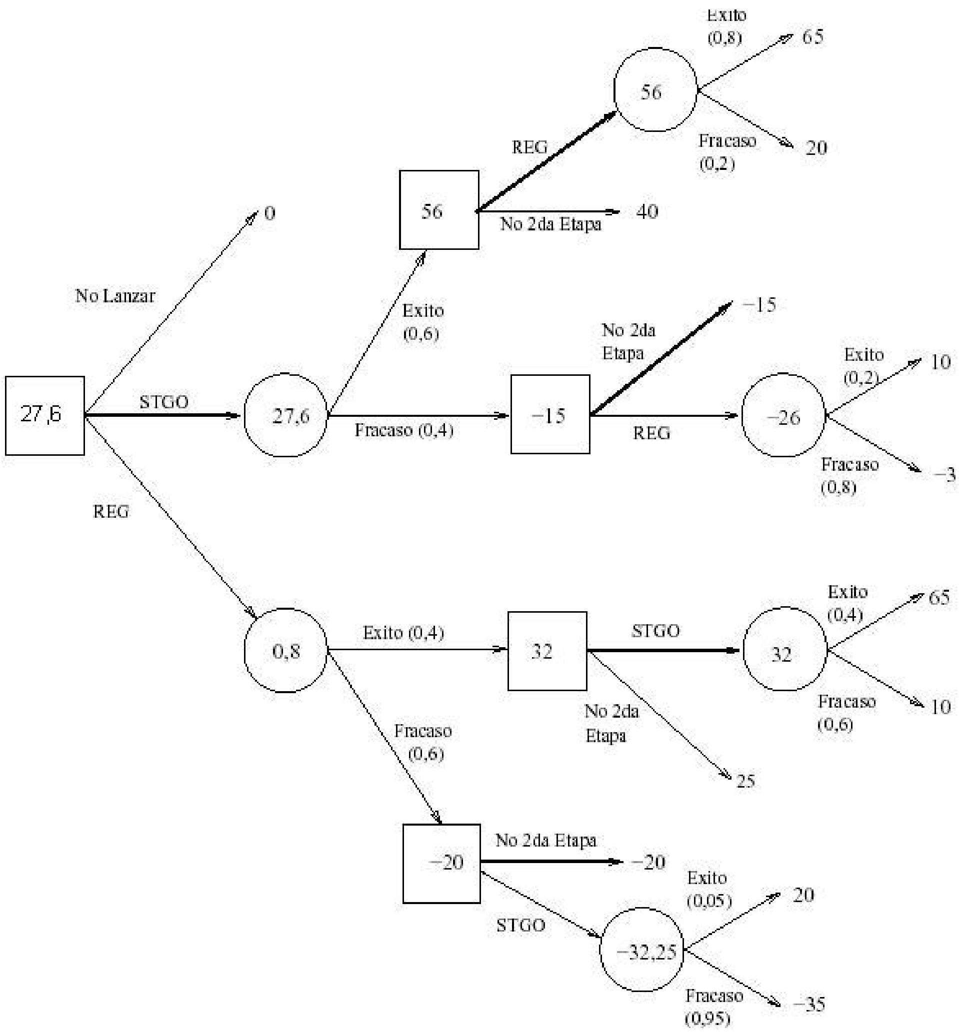
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 12 de Abril, 2004

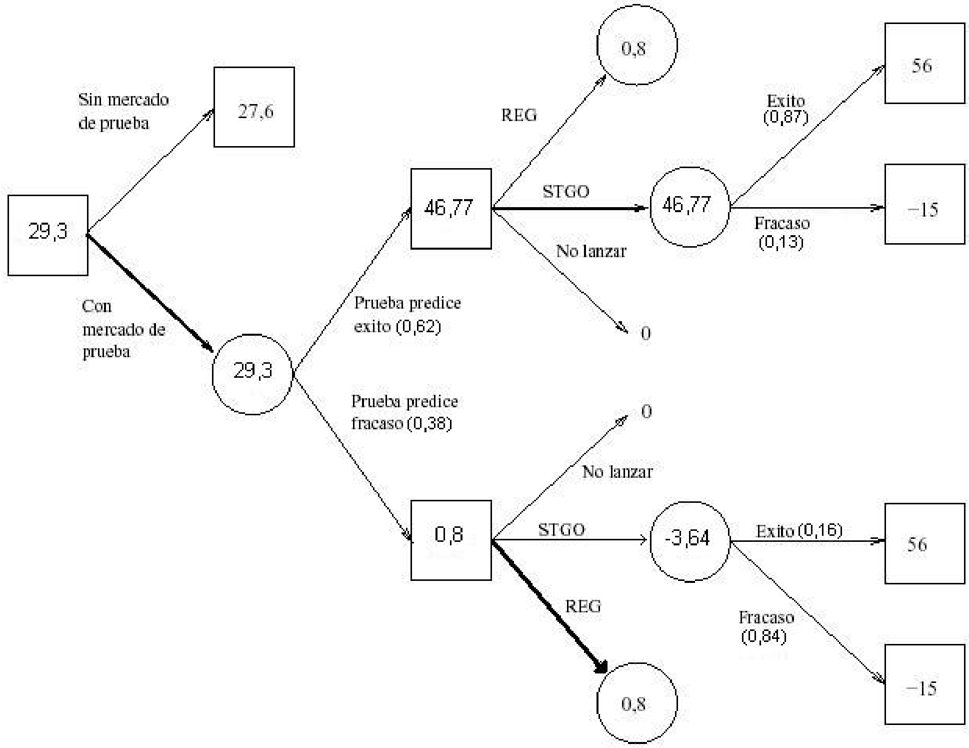
Problema 1

1. El árbol de decisión que resulta es el siguiente:



Del árbol podemos concluir que la política de lanzamiento óptima consiste en:
Primera Etapa: Lanzar el producto en "Santiago".
Segunda Etapa: Si la primera etapa resulta exitosa, lanzar en "Regiones". Si la primera etapa resulta ser un fracaso, no lanzar en "Regiones".

2. El árbol que resulta es el siguiente:



Observación: en las hojas de este árbol que corresponden a nodos de decisión/eventos aleatorios deben ser completados con los subárboles correspondientes del árbol del punto 1.. Estos subárboles son iguales a los del punto 1. ya que la información relevante no cambia.

Para completar este árbol se necesitan calcular algunas probabilidades. Para esto utilizamos la siguiente notación para eventos:

PE := "Mercado de prueba predice éxito en primera etapa en Santiago"
PF := "Mercado de prueba predice fracaso en primera etapa en Santiago"

ES := "Exito en primera etapa en Santiago"
FS := "Fracaso en primera etapa en Santiago"

Las probabilidades necesarias son:

- $\mathbb{P}$(Mercado de prueba predice éxito):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(PE) &= \mathbb{P}(PE|ES) \times \mathbb{P}(ES) + \mathbb{P}(PE|FS) \times \mathbb{P}(FS)\\ &= 0{,}9 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}4\\ &= 0{,}62\end{aligned}$$

- $\mathbb{P}$(Exito en primera etapa en Santiago | Mercado de prueba predice éxito):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(ES|PE) &= \frac{\mathbb{P}(PE|ES) \times \mathbb{P}(ES)}{\mathbb{P}(PE)}\\ &= \frac{0{,}9 \times 0{,}6}{0{,}62}\\ &= 0{,}87\end{aligned}$$

- $\mathbb{P}$(Exito en primera etapa en Santiago | Mercado de prueba predice fracaso):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(ES|PF) &= \frac{\mathbb{P}(PF|ES) \times \mathbb{P}(ES)}{\mathbb{P}(PF)}\\ &= \frac{0{,}1 \times 0{,}6}{0{,}38}\\ &= 0{,}16\end{aligned}$$

Por lo tanto, el monto máximo que la compañía está dispuesta a pagar por el lanzamiento reducido es: 29,3 - 27,6 = 1,7 millones de pesos. En particular, si el costo de este lanzamiento es de 5 millones de pesos, no conviene realizarlo.

Problema 2

1. Supondremos que $P_2 < C_1$ (si no la decisión es trivial), con lo que solo analizamos el caso $X < D$. Si la demanda t es menor a la cantidad ordenada X, las utilidades toman la siguiente forma:

$$Utilidad = t \cdot P_1 - X \cdot C_1 + (X - t) \cdot P_2$$

2. Si la demanda t es mayor a la cantidad ordenada X, las utilidades toman la siguiente forma:

$$Ganancia = X \cdot P_1 - (t - X) \cdot C_2 - X \cdot C_1$$

3. Para obtener la ganancia diaria esperada simplemente integramos la función de utilidad condicionada sobre todo el dominio de función la demanda ponderando por la densidad de probabilidad. Esto es:

$$
\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}] &= \int_0^D E[\text{Utilidad } |t] \cdot \frac{dt}{D} \\
&= \int_0^X E[\text{Utilidad } |t] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D E[\text{Utilidad } |t] \cdot \frac{dt}{D} \\
&= \int_0^X [t \cdot P_1 - C_1 \cdot X + (X - t) \cdot P_2] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D [X \cdot P_1 - C_1 \cdot X - (t - X) \cdot C_2] \cdot \frac{dt}{D} \\
&= \frac{X^2}{2D} \cdot P_1 + \frac{X^2}{D} \cdot P_2 - \frac{X^2}{2D} \cdot P_2 + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot P_1 - \frac{D}{2} \cdot C_2 + \frac{X^2}{2D} \cdot C_2 \\
&\quad + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot C_2 - X \cdot C_1
\end{aligned}
$$

4. Derivamos e igualamos a 0.

$$
\frac{X}{D} \cdot P_1 + P_1 + \frac{X}{D} \cdot P_2 - \frac{2 \cdot X}{D} \cdot P_1 + \frac{X}{D} \cdot C_2 + C_2 - \frac{2X}{D} \cdot C_2 - C_1 = 0
$$

Entonces, despejando:

$$
X = D \cdot (1 + \frac{-C_1 + P_2}{P_1 - P_2 + C_2})
$$

5. Procedemos de la misma forma. Consideremos Consideremos a I^* tal que:

$$
I^* = \text{mín}\{D_B, \frac{X_A + X_B \cdot q}{q}\}
$$

Este número nos indica cuando la demanda por la poción B y por la poción A es cubierta tan solo con la demanda del producto B

$$
\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}] &= \int_0^{D_B} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} \\
&= \int_0^{X_B} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} + \int_{X_B}^{I^*} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} + \int_{I^*}^{D_B} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B}
\end{aligned}
$$

Si $X_B > i$:

$$
\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}|i] &= -C_{1B} \cdot X_B + P_{1B} \cdot i + P_{2B} \cdot (X_B - i) - C_{1A} \cdot X_A + \int_0^{X_A} [t \cdot P_{1A} + (X_A - t) \cdot P_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A} \\
&\quad + \int_{X_A}^{D_A} [X_A \cdot P_{1A} - (t - X_A) \cdot C_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A}
\end{aligned}
$$

Si $X_B < i < I^*$:

$$
\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}|i] &= -C_{1B} \cdot X_B + P_{1B} \cdot X_B + P_{1A} \cdot q \cdot (i - X_B) - C_{1A} \cdot X_A \\
&\quad + \int_0^{X_A - q\cdot(i - X_B)} [t \cdot P_{1A} + (X_A + q \cdot (i - X_B) - t) \cdot P_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A} \\
&\quad + \int_{X_A - q\cdot(i - X_B)}^{D_A} [(X_A - q \cdot (i - X_B)) \cdot P_{1A} - (t - X_A + q \cdot (i - X_B)) \cdot C_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A}
\end{aligned}
$$

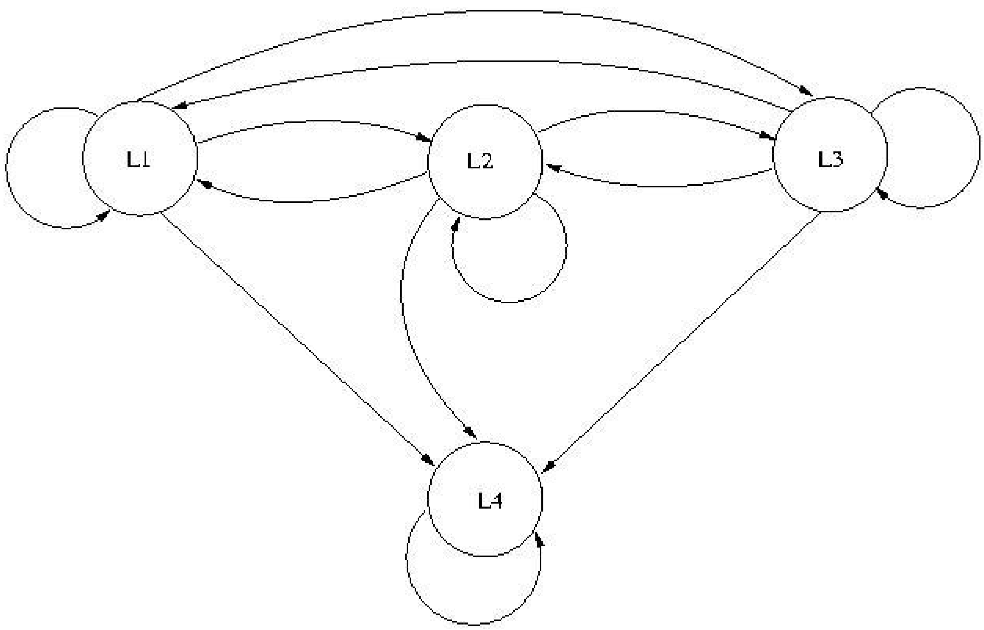
Finalmente, si $i > I^*$

$$
\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}|i] &= -C_{1B} \cdot X_B - C_{1A} \cdot X_A + P_{1B} \cdot X_B + X_A \cdot P_{1A} \\
&\quad -(i - I^*) \cdot C_{2A} + C_{2A} \cdot \frac{D_2}{2}
\end{aligned}
$$

Implícitamente hemos supuesto que $X_B < D_B$, que $X_A < (D_B - X_B) \cdot q$ y que $X_A + X_B < D_A + D_B$. Integrando estas expresiones (y diferenciando rangos en los que I^* menor o igual a D_B) se obtiene una expresión para las utilidades en función de X_A y X_B. Luego derivamos ambas expresiones respecto a las variables de decisión, igualamos a 0 y comprobamos que corresponden a los intervalos relevantes.

Problema 3

1. La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:



Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

- {L1, L2, L3}: clase transiente.
- {L4}: clase recurrente aperiódica.

La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2, L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$
P = \begin{bmatrix}
p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\
\frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\
\frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

2. Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo "ergódica más transiente" (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica).

   Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:

$$\pi = [0, 0, 0, 1] \, .$$

   De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Mandinga irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl