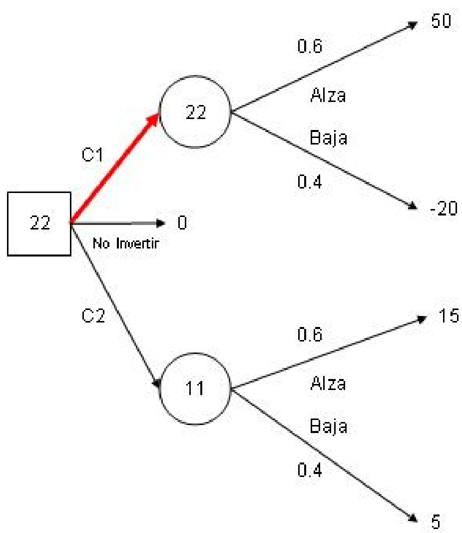
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 14 de Abril, 2004

Problema 1

1. Para determinar la política óptima de inversión se debe resolver el siguiente árbol:



   Luego se obtiene que la política óptima es invertir en C_1, con un valor esperado de los beneficios de 22M$.

2. Definamos los siguiente eventos:

   - OPT: Amigo optimista y opina que el mercado está al alza.
   - PES: Amigo pesimista y opina que el mercado está a la baja.
   - A: Mercado a la alza
   - B: Mercado a la baja

   Según los datos del enunciado sabemos que:

$$P(\mathsf{OPT}/\mathsf{A}) = 0{,}9$$

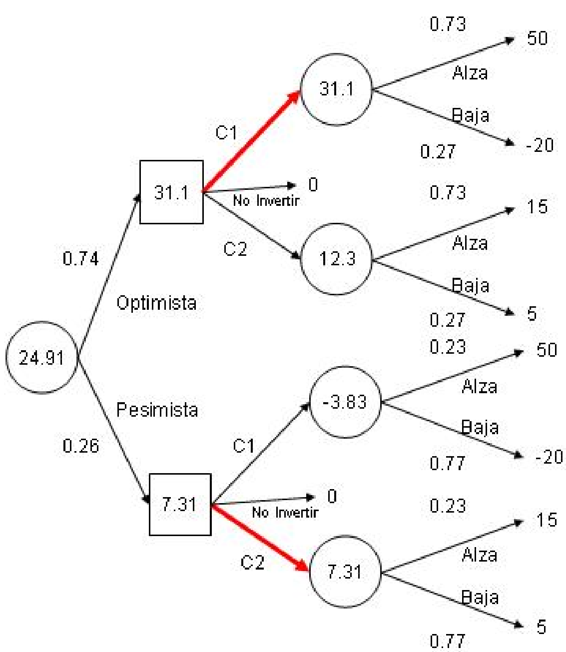
$$P(\textsf{OPT/B}) = 0{,}5$$
$$P(\textsf{PES/A}) = 0{,}1$$
$$P(\textsf{PES/B}) = 0{,}5$$

Se deben calcular las siguientes probabilidades:

$$P(\textsf{OPT}) = P(\textsf{OPT/A})P(\textsf{A}) + P(\textsf{OPT/B})P(\textsf{B}) = (0{,}9 \cdot 0{,}6) + (0{,}5 \cdot 0{,}4) = 0{,}74$$
$$P(\textsf{PES}) = P(\textsf{PES/A})P(\textsf{A}) + P(\textsf{PES/B})P(\textsf{B}) = (0{,}1 \cdot 0{,}6) + (0{,}5 \cdot 0{,}4) = 0{,}26$$

$$P(\textsf{A/OPT}) = \frac{P(\textsf{OPT/A})P(\textsf{A})}{P(\textsf{OPT})} = \frac{0{,}54}{0{,}74} = 0{,}730$$
$$P(\textsf{B/OPT}) = \frac{P(\textsf{OPT/B})P(\textsf{B})}{P(\textsf{OPT})} = \frac{0{,}20}{0{,}74} = 0{,}270$$
$$P(\textsf{A/PES}) = \frac{P(\textsf{PES/A})P(\textsf{A})}{P(\textsf{PES})} = \frac{0{,}06}{0{,}26} = 0{,}231$$
$$P(\textsf{B/PES}) = \frac{P(\textsf{PES/B})P(\textsf{B})}{P(\textsf{PES})} = \frac{0{,}20}{0{,}26} = 0{,}769$$

Luego, con la nueva información, la situación se resume en el siguiente árbol:



Luego lo máximo que estariá dispuesto a pagar por la información es :

$$VE(\textsf{Info}) = 24,91 - 22 = 2,91$$

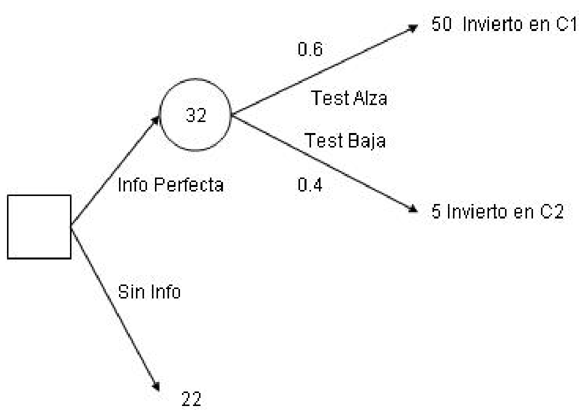
3. Para el de un Test de Información Perfecta definamos la siguiente notación adicional:

   - TA: Test predice alza.
   - TB: Test precide baja.

   Luego se tiene que:

$$P(\textsf{A}/\textsf{TA}) = 1$$
$$P(\textsf{B}/\textsf{TB}) = 1$$
$$P(\textsf{TA}) = 0{,}6$$
$$P(\textsf{TB}) = 0{,}4$$

   Y el árbol correspondiente queda como sigue:

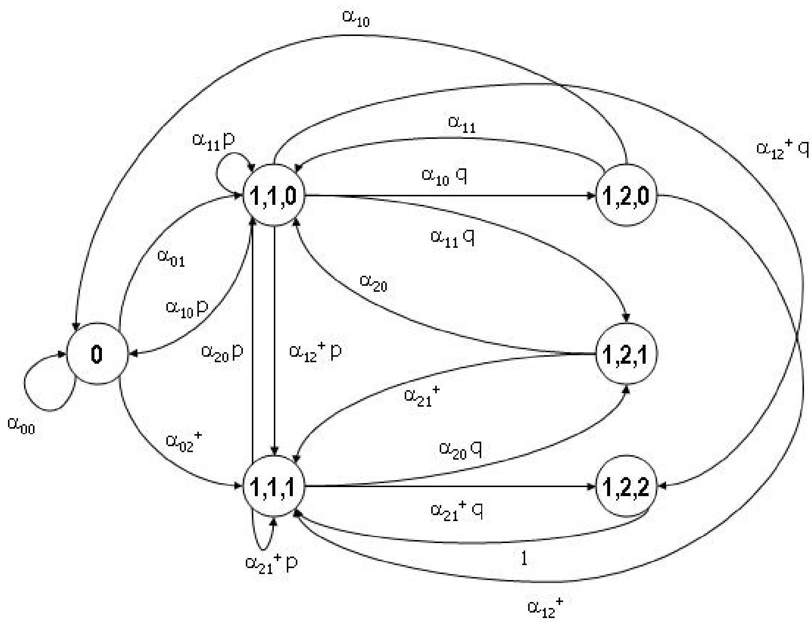


   Luego el Valor esperado de la Información Perfecta es:

$$VEIP = 32 - 22 = 10$$

Problema 2

1. La cadena se muestra en la siguiente figura:



   El estado (0) representa el consultorio vacío. Por otro lado en los estados de la forma (a, b, c), a es el número de personas en atención, b en la hora de atención en que se encuentra y c la cantidad de personas esperando.

   Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Por lo tanto, existen probabilidades estacionarias.

2. En esta parte consideramos conocido el vector Π de probabilidades estacionarias.

   a) Para responder a esta pregunta debemos ver que condiciones deben darse en cada estado para que existan pacientes que se retiren indignados. Esto sucede en los siguientes casos:

   - (0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo (i.e., a partir del tercero).
   - $(1, 1, 0)$: Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
   - $(1, 1, 1)$: Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
   - $(1, 2, 0)$: Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
   - $(1, 2, 1)$: Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
   - $(1, 2, 2)$: Todos los pacientes que lleguen.

   Por lo tanto, denotando por E_1 a la esperanza de la cantidad de pacientes que una hora se retiran indignados se tiene que

$$\begin{aligned} E_1 &= \Pi_0 \cdot \sum_{k>2} (k-2) \cdot \alpha_{0k} + \Pi_{(1,1,0)} \cdot \sum_{k>2} (k-2) \cdot \alpha_{1k} + \Pi_{(1,1,1)} \cdot \sum_{k>1} (k-1) \cdot \alpha_{2k} \\ &\quad + \Pi_{(1,2,0)} \cdot \sum_{k>2} (k-2) \cdot \alpha_{1k} + \Pi_{(1,2,1)} \cdot \sum_{k>1} (k-1) \cdot \alpha_{2k} + \Pi_{(1,2,2)} \cdot \sum_{k>0} k \cdot \alpha_{3k} \, . \end{aligned}$$

b) Si un paciente logró entrar al sistema pudo haberlo hecho en los siguientes estados: (0), $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,1)$ o $(1,2,1)$. Por lo tanto, dado que el paciente entró al sistema, los "casos favorables" a considerar son los asociados a estos cinco estados.

Para determinar los "casos favorables" analicemos lo que sucede en cada uno de estos estados.

- Estados $(1,1,1)$ y $(1,2,1)$: En estos estados el paciente nunca será atendido en la siguiente hora, ya que ya había una persona esperando y ella será atendida antes (recuerde que el médico atiende por orden de llegada).
- Estado (0): El paciente será atendido en la próxima hora si es el primero en llegar. Esto puede suceder si es el único en llegar o si llegan más de uno y es el primero de ellos.
- Estado $(1,1,0)$: Este caso es análogo al anterior, pero hay que considerar la posibilidad de que el paciente que actualmente se está atendiendo requiera una segunda hora con el médico.
- Estado $(1,2,0)$: Este caso es análogo al caso del estado (0).

Denotemos por Π_{CT} a la probabilidad de estar en alguno de los cinco estados "favorables", es decir

$$\Pi_{CT} = \Pi_0 + \Pi_{(1,1,0)} + \Pi_{(1,2,0)} + \Pi_{(1,1,1)} + \Pi_{(1,2,1)}\,.$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{1}{\Pi_{CT}}\left[\Pi_0\left(\alpha_{01} + \tfrac{1}{2}\alpha_{02}^{+}\right) + \Pi_{(1,1,0)}\cdot p\left(\alpha_{11} + \tfrac{1}{2}\alpha_{12}^{+}\right) + \Pi_{(1,2,0)}\left(\alpha_{11} + \tfrac{1}{2}\alpha_{12}^{+}\right)\right]$$

Problema 3

1. Utilizando la indicación se tiene que:

$$F_{i+1} - F_i = \frac{q}{p}(F_i - F_{i-1}) \qquad \forall\ 0 < i < N$$

Además sabemos que $F_0 = 0$ y $F_N = 1$.

Desarrollando se tiene que:

$$F_2 - F_1 = \frac{q}{p}F_1$$

$$F_3 - F_2 = \frac{q}{p}(F_2 - F_1) = (\frac{q}{p})^2 F_1$$

$$F_4 - F_3 = \frac{q}{p}(F_3 - F_2) = (\frac{q}{p})^3 F_1$$

Generalizando lo anterior:

$$F_i - F_{i-1} = (\frac{q}{p})^{i-1} F_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$F_N - F_1 = F_1 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} (\frac{q}{p})^i \Rightarrow F_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1}(\frac{q}{p})^i} = \frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$F_i = F_1 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{q}{p}^k) = \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}$$

2. Sea D la diferencia entre el número de curaciones acumuladas del medicamento 1 y del medicamente 2. Después de cada test, D crece en uno con probabilidad $P_1(1-P_2)$, baja en uno con probabilidad $(1-P_1)P_2$ o queda igual con probabilidad $P_1P_2+(1-P_1)(1-P_2)$.

   Sólo nos interesan los pares en que D cambia, por lo tanto si descartamos los pares en que D no cambia, la diferencia sube en uno con probabilidad.

$$\begin{aligned} p &= P[\text{sube 1}|\text{D cambió}] \\ &= \frac{P_1(1-P_2)}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2} \end{aligned}$$

   y baja 1 con probabilidad

$$q = 1-p = \frac{(1-P_1)P_2}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2}$$

   Haciendo la analogía con la ruina del jugador se tiene que la probabilidad de que el test afirme que $P_2 > P_1$ es igual a la probabilidad de que el jugador que gana un ficha con probabilidad p baje M antes de subir M. De acuerdo a la ecuación de la parte 1 ($F_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$), con $i = M$, $N = 2M$, esta probabilidad está dada por

$$P[\text{test afirme que } P_2 > P_1] = 1 - \frac{1-(\frac{q}{p})^M}{1-(\frac{q}{p})^{2M}}$$

Dudas y/o errores:
José Guajardo
jguajard@ing.uchile.cl