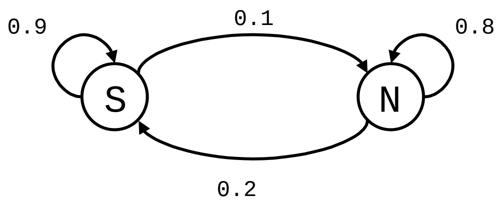
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

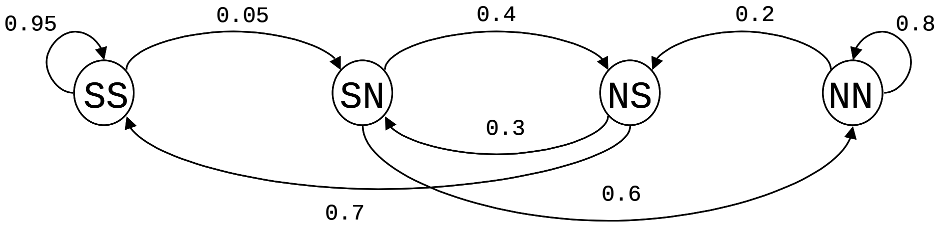
Solución Clase Auxiliar 7 de Abril, 2004

Problema 1

1. Claramente la cadena queda como sigue:



2. En este caso es necesario definir los estados como tuplas, en que se almacena la información del clima del día anterior y del día actual. La cadena se muestra en la siguiente figura:



3. Si se parte en el estado (NS), para calcular el número promedio de días nublados antes del próximo día soleado debemos analizar las posibles transiciones desde dicho estado inicial:

   - Si evolucionamos al estado (SS), no habrá ningún día nublado antes del próximo día soleado.
   - Si evolucionamos al estado (SN) y luego al (NS) habrá UN día nublado antes del siguiente soleado.
   - Si evolucionamos al estado (SN) y luego al (NN) habrán $(k+2)$ días nublados, si es que se itera k veces en el estado (NN) antes de pasar al estado (NS).

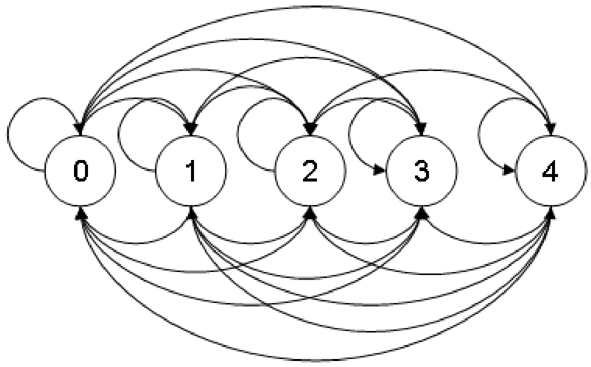
   Luego la esperanza pedida está dada por:

$$E = 1 \cdot (0{,}3 \cdot 0{,}4) + (0{,}3 \cdot 0{,}6) \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(0{,}8)^k (0{,}2)$$

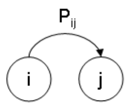
4. Es posible demostrar por inducción (propuesto) que si el clima depende del estado del tiempo de los últimos n días, se requiere una Cadena de Markov con 2^n estados.

Problema 2

1. Primero veamos cuál es el grafo para el caso reducido (s=2 y S=4), el cual se muestra en la figura.



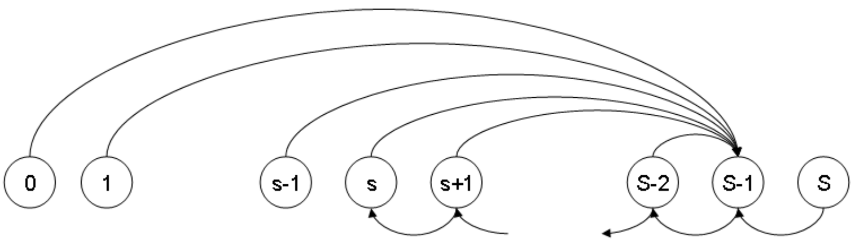
La idea del ejemplo es ver que el número de transiciones es tal que no tiene sentido hacer el grafo. La idea entonces es identificar cada transición mediante la probabilidad de ocurrencia. La cadena para el caso general se muestra en la figura.



Donde:

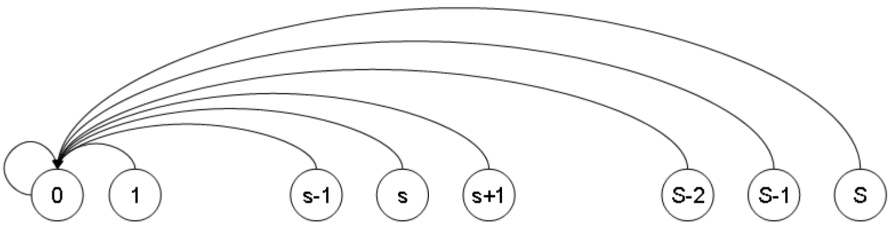
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i > s \quad y \quad j > i \\ \alpha_{i-j} & si \quad i > s \quad y \quad 0 < j \leq i \\ \sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k & si \quad i > s \quad y \quad j = 0 \\ \alpha_{S-j} & si \quad i \leq s \quad y \quad 0 < j \leq S \\ \sum_{k=S}^{\infty} \alpha_k & si \quad i \leq s \quad y \quad j = 0 \end{cases}$$

2. En este caso sí podemos visualizar la cadena como un todo, puesto que el número de transiciones es muy bajo. La cadena se muestra en la figura.



De la figura vemos que los estados 0 al s-1 más el estado S son transientes y dado que no están comunicados entre sí cada uno por sí solo constituye una clase transiente. Por otro lado los estados del s al S-1 están comunicados entre sí y forman una clase recurrente (con seguridad después de S-s-1 pasos volveremos a cualquiera de los estados de esta clase). Por otro lado el periodo de los estados de la clase recurrente es S-s, dado que existe sólo una forma de volver a un estado partiendo del mismo, y eso ocurre con seguridad después de S-s etapas.

3. La cadena se muestra el la figura.



Vemos que existe un único estado recurrente, que forma por sí solo una clase recurrente. Todos los otros estados no están comunicados entre sí y conforman por sí solos clases transientes.

Problema 3

1. Como cada cliente puede demandar sólo una unidad del producto y lo hace con probabilidad p, la demanda mensual puede ser descrita con una distribución Binomial(N,p). Por lo tanto:

$$P[\text{Demanda} = k] = \alpha_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad \forall k \in \{1, ..., N\}$$

2. Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades la tienda pide $T - n$ unidades, las que llegaran al inicio del siguiente mes. No obstante, durante el mes el nivel n se ve reducido por la demanda que observa la tienda. De esta manera, si la demanda en el mes es de k unidades, al inicio del siguiente mes el nivel de inventario será $\max\{n-k, 0\} + (T-n)$ unidades. Notamos que a lo más puedo vender la cantidad que está en inventario (no existen ventas pendientes).

   Sea P_{ij} La probabilidad de comenzar un mes con j unidades si al comienzo del mes anterior tenia i unidades en inventario. Entonces $\forall i, \, j \in \{0, ..., T\}$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad j < T-i \\ \alpha_{i+} = \sum_{k=i}^{N} \alpha_k & si \quad j = T-i \\ \alpha_{T-j} & si \quad j > T-i \end{cases}$$

3. Para identificar la cadena de Markov simplemente necesitamos especificar cuales son los estados de la misma e identificar la matriz de transición. Claramente los estados son:

$$X_i = \text{Inventario al comienzo del mes es de i unidades} \qquad i \in \{0, ..., T\}$$

   Es decir T+1 estados. Las componentes de la matriz de trancisión son las calculadas en el punto anterior.

   Otra forma de especificar la cadena era bosquejar el grafo asociado. Sin embargo para que dicho grafo se encuentre completamente correcto debe incluir una transición genérica entre los estados i y j.

   Esta Cadena de Markov es finita y está definida por una única clase recurrente aperiódica (ergódica e irreductible). Para ver esto notamos que desde el estado x_T podemos acceder a cualquier otro estado y que desde cada estado puedo acceder a x_T (entonces existe solo una clase). Vemos que es aperíodico puesto que la transición desde x_T a x_T tiene probabilidad no nula. Dados estos argumentos podemos asegurar la existencia de probabilidades estacionarias.

4. Debemos incluir información acerca si existen pedidos que no llegaron al comienzo de la semana en cuestión. Más aun debemos incluir cuantos productos no llegaron debido a un retraso y que por lo tanto se encontraran con seguridad disponibles al comienzo de la próxima semana.

5. Para identificar la cadena de Markov debemos especificar los estados de la misma e identificar la matriz de transición asociada. Los estados son:

$$\begin{array}{lcl} x_{i,j} & = & \text{i unidades al comienzo del mes en bodega y j unidades} \qquad \forall i,j \in \{\mathbb{N}^2 | j+i \leq T\} \\ & & \text{llegaran con seguridad al comienzo del próximo mes} \end{array}$$

En este caso los elementos de la matriz de transición toman la siguiente forma $(i,j,l,k \in \mathbb{N} \quad | i+j \leq T \wedge l+k \leq T)$

$$P_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} 0 & si \quad (k < T-i \,\wedge\, l=0) \vee (k<j \,\wedge\, l = T-i-j) \\ & \quad \vee (l \neq T-i-j \,\wedge\, l \neq 0) \\ q \cdot \alpha_{i+} = & si \quad k=j \,\wedge\, l = T-i-j \\ (1-q)\cdot \alpha_{i+} = & si \quad k = T-i \,\wedge\, l=0 \\ q\cdot \alpha_{i+j-k} & si \quad k<j \,\wedge\, l=T-i-j \\ (1-q)\cdot \alpha_{T-k} & si \quad k<T-i \,\wedge\, l=0 \end{cases}$$

La justificación acerca de la existencia de probabilidades estacionarias es análoga a la de la parte 3.

6. La esperanza del costo fijo simplemente es (supongo que pago el costo cuando ordeno):

$$E[Costo] = B \cdot \left[\sum_{i,j|i+j<\frac{T}{2}} \pi_{i,j} \right] + A \cdot \left[\sum_{i,j|i+j\geq\frac{T}{2}} \pi_{i,j} \right]$$

Dudas y/o errores:
José Guajardo
jguajard@ing.uchile.cl