DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 7 de Abril, 2004

Problema 1

1. En una ciudad el 9 % de los días soleados son seguidos por otro día soleado y el 80 % de los días nublados son seguidos por otro día nublado. Modele este problema como una cadena de Markov.

Suponga ahora que el estado del tiempo en un día cualquiera depende del estado del tiempo en los últimos dos días, de la siguiente forma:

- Si los dos últimos días han sido soleados entonces con una probabilidad de 95 % hoy también estará soleado.
- Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, hay una probabilidad de un 70 % de que mañana esté soleado.
- Si ayer estuvo soleado y hoy nublado entonces 60 % de las veces mañana estará nublado.
- Si han pasado dos días con el cielo cubierto de nubes, hay una probabilidad de un 80 % de que las nubes quieran quedarse un día más.

2. Con esa información modele el estado del tiempo en la ciudad como una cadena de Markov.
3. Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, ¿Cuál es el número promedio de días nublados antes del próximo día soleado?.
4. Si el tiempo en un día dado dependiera del estado del tiempo en los últimos n días ¿Cuántos estados se necesitarían para modelar el tiempo como una cadena de Markov?.

Problema 2

Una tienda vende un único producto, del cual mantiene inventarios en una bodega. Al comenzar cada semana el gerente observa el inventario disponible en bodega, I. Si $I \leq s$ entonces el gerente pide $S - I$ unidades al proveedor ($0 < s < S$), de manera de quedar con S unidades en bodega. El pedido es recibido de inmediato. Si $I > s$ el gerente no hace un pedido esa semana.

Las demandas en cada semana son variables aleatorias iid. En una semana cualquiera la demanda es de k unidades con probabilidad α_k ($k \geq 0$). La demanda insatisfecha se pierde.

1. Muestre que el nivel de inventarios al comienzo de cada semana (antes de hacer el pedido) se puede modelar como una cadena de Markov. Indique claramente cuáles son los estados que ha definido y calcule las probabilidades de transición. Dibuje el grafo representante para el caso $s = 2, S = 4$.

En lo que sigue considere $0 < s < S$ arbitrarios.

2. Suponga ahora que la demanda es determinística e igual a 1 unidad en cada semana (i.e. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_k = 0\ \forall k \neq 1$). Dibuje el grafo representante para este caso (note que la bodega puede comenzar con menos de s unidades). Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periodicidad.
3. Suponga ahora que la demanda en cada semana es mayor que S con seguridad (es decir, $\alpha_k = 0 \forall k \leq S$). Dibuje el grafo representante para este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periodicidad.

Problema 3

Considere una tienda que distribuye un único producto, muy exclusivo, a N clientes . Para otorgarles un buen nivel de servicio mantiene unidades de este producto almacenadas, siendo administradas mediante un Sistema de Revisión Periódica Mensual.

De esta manera al comenzar cada mes la tienda revisa el nivel de inventario, n, que considera las existencias en la tienda, y pide a su proveedor una cantidad $T - n$ de unidades ($0 \leq n \leq T$), donde T corresponde al nivel de inventario objetivo ($T \leq N$). La cantidad pedida demora exactamente un mes en llegar, es decir, estará disponible al comienzo del siguiente mes (antes de hacer el pedido).

1. (1.0 ptos.) Suponga que, independiente de todo, cada cliente mensualmente puede demandar sólo una unidad del producto, y que lo hace con probabilidad p. ¿Con qué probabilidad la tienda ve una demanda mensual igual a k unidades? Llame a esta probabilidad α_k ($0 \leq k \leq N$).

2. (1.0 ptos.) Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades, ¿en qué estados se podrá encontrar el sistema al inicio del siguiente mes? ¿qué probabilidades tienen asociadas las transiciones posibles?

   Indicación: Considere que la demanda insatisfecha se pierde.

3. (1.0 ptos.) Utilizando las probabilidades calculadas en las partes anteriores, modele el nivel de inventario de la tienda al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

Suponga ahora que con probabilidad q la cantidad pedida en un mes cualquiera requiere un mes adicional para su llegada a la tienda.

4. (0.5 ptos.) ¿Qué información adicional debe incorporarse a los estados definidos anteriormente para representar el nuevo escenario del sistema como una Cadena de Markov?

5. (1.5 ptos) Para el nuevo escenario, modele el sistema al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

6. (1.0 ptos.) Considere conocidas las probabilidades estacionarias para la cadena de la parte anterior, y suponga que la estructura del costo fijo de pedido al inicio de cada mes está dada por la siguiente expresión:

$$C(n) = \begin{cases} A & si \quad n \leq T/2 \\ B & si \quad n > T/2 \end{cases}$$

   Determine el costo fijo de pedido esperado en el largo plazo.