DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

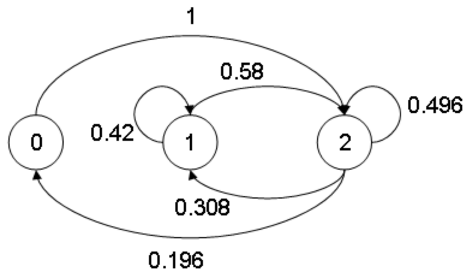
Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 6 de Abril, 2004

Problema 1

1. Es posible dado que el número de autos disponibles al comienzo de un día cualquiera sólo depende de la cantidad de autos disponibles al comienzo del día anterior y esto es suficiente para determinar la evolución del sistema (en probabilidades).

2. La cadena toma se muestra en la figura.



Cálculo de las probabilidades de transición:

$$
\begin{aligned}
P_{0,2} &= 1 \quad \text{(Si no tengo taxis disponibles con seguridad ambos estarán disponibles mañana).}\\
P_{1,2} &= [P(D=1)+P(D\geq 2)]\cdot P[\text{No falle}] + P(D=0) = 0{,}58\\
P_{1,0} &= 0 \quad \text{(Por lo menos tengo bueno, la mañana siguiente, el auto en reparación)}\\
P_{1,1} &= 1-0{,}58 = 0{,}42\\
P_{2,0} &= P(D\geq 2)\cdot P[\text{Ambos autos fallen}] = 0{,}196\\
P_{2,1} &= P(D=1)\cdot P[\text{Auto falle}] + 2\cdot P(D\geq 2)\cdot P[\text{Uno falla y el otro no}] = 0{,}308\\
P_{2,2} &= P(D=0)+P(D=1)\cdot P[\text{Auto no falle}] + P[D\geq 2]\cdot P[\text{No falle ninguno}]
\end{aligned}
$$

Entonces la matriz de transición es la siguiente:

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 1\\
0 & 0{,}42 & 0{,}58\\
0{,}196 & 0{,}308 & 0{,}496
\end{vmatrix}
$$

Existe sólo una clase recurrente aperiódica compuesta por todos los estados de la cadena.

3. Dado que la cadena es ergódica existirá una ley de probabilidades estacionarias.

   Esta ley debe cumplir con los siguientes requisitos:

$$\begin{vmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}42 & 0{,}58 \\ 0{,}196 & 0{,}308 & 0{,}496 \end{vmatrix}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$
$$\pi_i \geq 0 \qquad \forall i$$

Resolviendo se obtiene que $\pi_0 = 0{,}11$, $\pi_1 = 0{,}31$ y $\pi_2 = 0{,}58$.

4. *a*)

$$\begin{aligned} E[\text{Número de arriendos}] &= 1 \cdot \pi_1(P(D=1) + P(D \geq 2)) \\ &\quad +2 \cdot \pi_2(P(D \geq 2)) \\ &\quad +1 \cdot \pi_2 \cdot P(D=1) \\ &= 0{,}766 \end{aligned}$$

b)

$$E[\text{Costo}] = [2 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1] \cdot 10000 = 5300$$

c) El precio mínimo satisface la siguiente relación:

$$P^* \cdot E[\text{Número de arriendos}] = E[\text{Costo}] \Rightarrow P^* = 6919$$

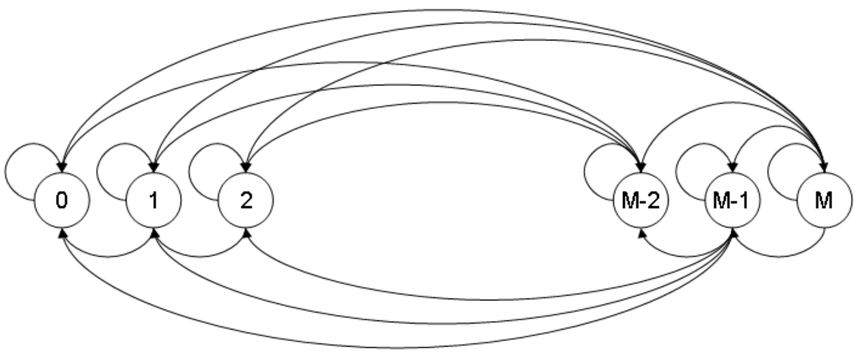
Problema 2

1. La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

   - El estado i será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \ldots, M\}$.
   - Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente formula[1]:

   $$P(i,j) = P(\text{ir del estado i al estado j}) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j} \cdot (1-p)^j & siM \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & sij \geq i \end{cases}$$

   La cadena se muestra a continuación en la figura.



[1] Esto es equivalente a definir la matriz de transición P.

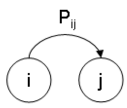
- Existen $M+1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuestas cada una por uno de los M estados restantes. Recuerdar que una clase está compuesta por todos los estados comunicados entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.

2. Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M-1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de períodos. Por esto se tiene que:

$$\begin{aligned}
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por M-1 en i transiciones}) \\
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en M por i-1 transiciones}) \cdot P(M.M-1) \\
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1} \\
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1-(1-p)^M}
\end{aligned}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergódica, se que en el largo plazo con seguridad estaré en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente está compuesta por el estado 0, se puede decir con seguridad (Probabilidad =1) que en el largo plazo el sistema llegará al estado 0 y por lo tanto se podrán instalar los equipos.

3. En este caso se tiene un número C de camas disponibles y existe la posibilidad que llegue gente al centro asistencial. La cadena asociada se muestra en la figura .



- El estado i será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \ldots, M\}$.
- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de personas que se recuperan.
  Entonces, para $j \neq C$:

$$P(i,j) = \sum_{k=0}^{i} P(i,j|\text{Se mejoran k personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo:

  P(i,j |Se mejoran k personas) =P(lleguen $j-i+k$ personas)

  siempre y cuando $j-i+k \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
P(i,j) &= \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} P(\text{lleguen } j-i+k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k} \\
P(i,j) &= \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} q_{j-i+k} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}
\end{aligned}$$

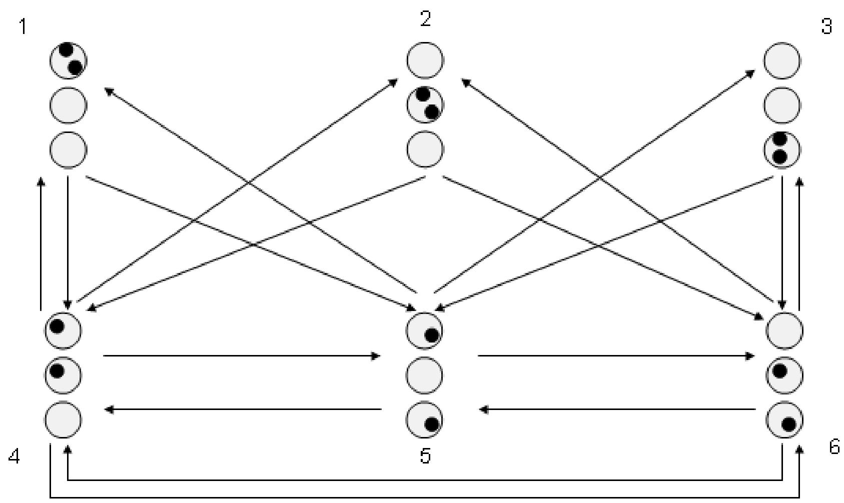
- De la misma forma, si $j = C$, entonces:

$$P(i,j) = \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} P(\text{lleguen más de } j-i+k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}$$

$$P(i,j) = \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} \left(\sum_{z=j-i+k}^{\infty} q_z \right) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}$$

Problema 3

1. Modelamos los estados como el número de bolitas bajo cada vaso. Tendremos entonces que la cadena se define de la siguiente forma:



La matriz de transiciones es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

2. De acuerdo a la definición $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ y $r_4 = r_5 = r_6 = 1$ Entonces: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{9}$ y $\pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \frac{2}{9}$.

   Por otro lado para que $\overrightarrow{\pi}$ sea ley estable debe cumplir con:

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}^T \cdot P$$

$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \quad \forall i$$

Las dos últimas condiciones se cumplen. Solo basta comprobar que (propuesto):

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

3. La cadena es ergódica (una sola clase recurrente, aperíodica) por lo que posee solo una ley estable, la cual es la ley de probabilidades estacionarias. Como ya encontramos una ley estable, esta misma es la ley estacionaria. La intuición del resultado va por el lado de la conectividad entre estados (los con bolitas separadas son accesibles desde muchos más estados y a estados del mismo tipo, en cambio para los estados con bolitas juntas no existen transiciones entre el mismo tipo.)

4. Para ganar debemos parar el juego en un estado tal que sea factible el ganar, y adicionalmente escoger correctamente el vaso ganador. Entonces la probabilidad de ganar será:

$$P[\text{Ganar}] = P[\text{Parar en estado factible}] \cdot P[\text{Escoger ganador}]$$

$$P[\text{Ganar}] = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Dudas y/o errores:
José Guajardo
jguajard@ing.uchile.cl