



Clase Auxiliar 6 de Abril, 2004

## Problema 1

Armijo, el colectivo de su barrio, le pide que lo asesore en el desarrollo de un nuevo proyecto de su microempresa de transporte de pasajeros, con el fin de definir la tarifa a cobrar.

Nuestro amigo cuenta con 2 vehículos con los que pretende implementar un servicio de arriendo de autos.

A las 8 de la mañana de cada día él conocerá la demanda por arriendos, la cual sigue la siguiente ley de probabilidades.

$$Pr[D = 0] = 0.4, Pr[D = 1] = 0.2 \text{ y } Pr[D \geq 2] = 0.4.$$

Un auto es arrendado por todo el día, es decir, con cada vehículo se puede atender a lo más un cliente diario.

Dada la apariencia apacible de Armijo, los clientes abusan de su buena voluntad, por lo que se estima que con probabilidad  $p = 0.7$  maltratarán el automóvil durante su uso, por lo que nuestro atribulado colectivo deberá llevarlo a mantención el día siguiente, y no podrá arrendarlo. La mantención demora exactamente un día, independiente del número de autos a reparar y tiene un costo de \$10.000 por vehículo.

Con el fin de ayudar a nuestro querido Armijo se pide que responda:

1. Justifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el número de vehículos disponibles al comienzo de un día cualquiera
2. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre la matriz de transición y clasifique los estados en clases.
3. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúelas.

A partir de las probabilidades estacionarias calculadas en la parte anterior, responda:

4. ¿Cuál es número esperado de arriendos diarios que realizaría esta empresa en estado estacionario?, ¿Cuál es el costo diario promedio por concepto de mantención? y ¿Cuál es el mínimo precio que Armijo debe cobrar por cada arriendo?.

## Problema 2

En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. Actualmente hay  $M$  pacientes en el centro, y con el fin de poder proceder a la instalación no se recibirán más pacientes hasta que ésta se realice.

Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad  $p$  de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad  $(1 - p)$  de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

1. Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.

Hint: Calcule la probabilidad  $\Pr[X(n) = r | X(n-1) = k]$ , con  $X(n)$  representando a la cantidad de personas en el centro en la semana  $n$ .

2. Si el sistema tiene inicialmente  $M$  pacientes, Cuál es la probabilidad que algún día tenga  $M - 1$ ?, ¿Cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Se sabe que la probabilidad que lleguen  $k$  pacientes en un día es  $q_k$ , con  $k = 0, 1, \dots, \infty$ . Además el centro sólo cuenta con  $C$  camas por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por una noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

3. Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados. ¿Existirán probabilidades estacionarias para este sistema?

### Problema 3

Un conocido mago del Paseo Ahumada ha hecho una respetable fortuna con el siguiente juego de azar: en una mesa tiene tres vasos (no transparentes) boca-abajo y dos bolitas que se colocan (juntas o por separado) debajo de alguno de los vasos. Luego, con una rapidez impresionante, el mago procede a mover las bolitas de un vaso a otro. En cada movimiento cambia de posición sólo una bolita. Esto lo hace incontables veces hasta que un jugador deseoso de apostar le dice "STOP". En ese momento el jugador tiene que escoger uno de los vasos. Si debajo de él están las DOS bolitas, gana. De lo contrario pierde. Para simplificar el juego, asuma que en cada movimiento el mago escoge con igual probabilidad cualquiera de las bolitas, y también equiprobablemente escoge a cuál de los OTROS vasos la cambia.

1. Muestre que el juego anterior se puede modelar como una Cadena de markov en tiempo discreto con sólo 6 estados. Constrúyala. Identifique los estados y especifique cuáles son las probabilidades de transición.
2. Sea  $r_k$  el número de vasos vacíos en el estado  $k$ , y  $\pi_k = (3 - r_k)/9$ . Demuestre que el vector definido por los  $\pi_k$  corresponde a una ley estable del sistema.
3. Argumente si la cadena anterior admite o no probabilidades estacionarias. En caso que su respuesta sea positiva, cuánto valen?. Explique intuitivamente por qué hay estados con mayor probabilidad estacionaria que otros.
4. Ignorando el hecho que usted pueda tener una vista muy aguda, a priori, cuál es la probabilidad de ganar el juego?. Considere que usted escoge equiprobablemente cualquiera de los tres vasos y que el mago hace "muchos" movimientos antes de que usted le diga "STOP".