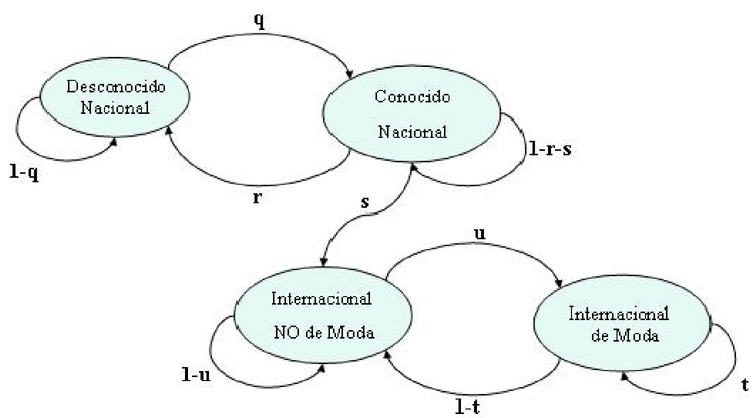
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 30 de Marzo, 2004

Problema 1

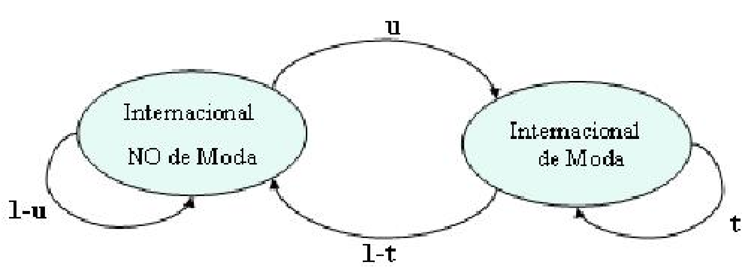
1. Para responder esta pregunta debemos modelar la trayectoria de la banda de Pepe como una cadena de Markov en tiempo discreto. Del enunciado se desprenden claramente tanto los estados como las probabilidades de transición:



2. Para responder esta pregunta clasificaremos los estados de la cadena. Ambos estados del tipo "Nacional" son transientes y conforman una única clase transiente, por lo tanto en algún momento en el futuro el sistema abandonara esta clase para no volver más. Es así como obligatoriamente en el largo plazo el sistema se encontrará en alguno de los otros dos estados que conforman una única clase recurrente. Es decir Pepe alcanzará la fama irremediablemente.

3. Dado que la cadena posee una única clase recurrente aperíodica (es obvio dado que los estados de esta clase pueden "ciclar" sobre si mismos) existirá una ley de probabilidades estacionarias.

4. Los estados transientes necesariamente tendrán probabilidades estacionarias nulas. Es por esto que el sistema a resolver para calcular las probabilidades estacionarias es el asociado a la siguiente cadena:



De esta forma simplemente calculamos:

$$\begin{aligned} P_{INM} &= (1-u)\cdot P_{INM} + t\cdot P_{IM} \\ P_{IM} &= u\cdot P_{INM} + (1-t)\cdot P_{IM} \\ 1 &= P_{IM} + P_{INM} \end{aligned}$$

Entonces:

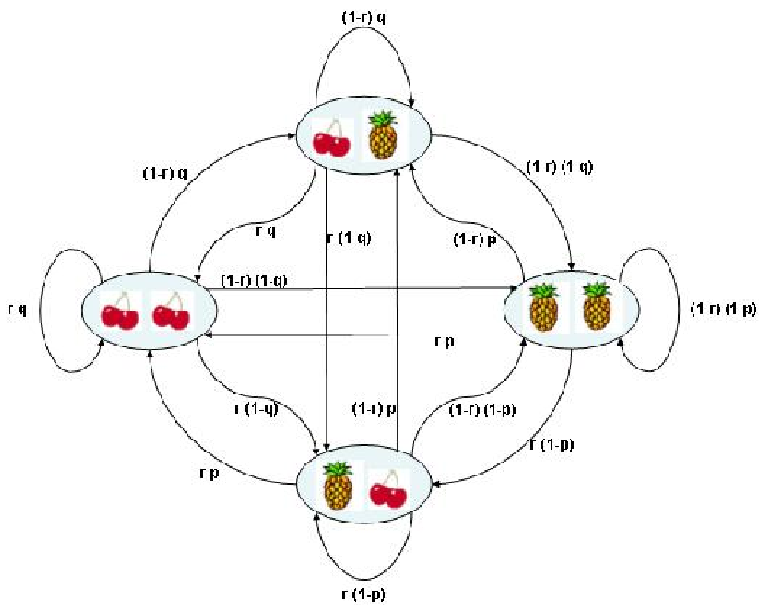
$$P_{INM} = \frac{t}{t+u}$$

5. En el largo plazo (a esto se refiere la pregunta) la probabilidad de que la banda de Pepe sea famosa y este de moda es P_{IM}. Entonces las ganancias esperadas (mensuales) en el largo plazo son:

$$E[Utilidad] = K \cdot P_{IM}$$

Problema 2

1. Los estados y las probabilidades de transición entre ellos son los que se indican en el siguiente grafo:



Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena.

2. Existe una única clase recurrente, aperiódica, por lo tanto existirá una ley de probabilidades estacionarias. Para encontrar el valor de estas probabilidades simplemente calculamos una ley estable (la única):

$$\begin{aligned}
\Pi_{GG} &= r \cdot q \cdot \Pi_{GG} + r \cdot q \cdot \Pi_{GP} + r \cdot p \cdot \Pi_{PG} + r \cdot p \cdot \Pi_{PP} \\
\Pi_{GP} &= (1-r) \cdot q \cdot \Pi_{GG} + (1-r) \cdot q \cdot \Pi_{GP} + (1-r) \cdot p \cdot \Pi_{PG} + (1-r) \cdot p \cdot \Pi_{PP} \\
\Pi_{PG} &= r \cdot (1-q) \cdot \Pi_{GG} + r \cdot (1-q) \cdot \Pi_{GP} + r \cdot (1-p) \cdot \Pi_{PG} + r \cdot (1-p) \cdot \Pi_{PP} \\
\Pi_{PP} &= (1-r) \cdot (1-q) \cdot \Pi_{GG} + (1-r) \cdot (1-q) \cdot \Pi_{GP} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot \Pi_{PG} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot \Pi_{PP} \\
1 &= \Pi_{GG} + \Pi_{GP} + \Pi_{PG} + \Pi_{PP}
\end{aligned}$$

3. Dado que la máquina ha sido utilizada por mucho tiempo podemos suponer que hemos alcanzado el estado estacionario (recuerden que no miramos la situación actual del traga monedas). De esta manera la distribución de probabilidades del resultado de mi tirada será la distribución de la ley de probabilidades estacionarias. Entonces, la probabilidad de ganar es la probabilidad de encontrar la

máquina en un estado donde ambos símbolos sean iguales y además realizar la elección correcta. Esto es:

$$\begin{aligned} P[\textsf{Ganar}] &= P[\text{Escoger Guinda-Guinda}] \cdot \Pi_{GG} + P[\text{Escoger Piña-Piña}] \cdot \Pi_{PP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\Pi_{GG} + \Pi_{PP}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[\textsf{Utilidades}] = \frac{1}{2} \cdot (\Pi_{GG} + \Pi_{PP}) \cdot G - [1 - \frac{1}{2} \cdot (\Pi_{GG} + \Pi_{PP})] \cdot (C + T)$$

4. Nuevamente, dado que la máquina lleva mucho tiempo funcionando suponemos que el resultado de la próxima tirada se rige de acuerdo a la ley de probabilidades estacionarias. Si es así, los únicos estados que nos permiten obtener una ganancia son los estados Guinda-Piña y Piña-Guinda. Entonces:

$$P[\textsf{ganar}] = \Pi_{GP} + \Pi_{PG}$$

De esta forma:

$$E[\textsf{Utilidades}] = (\Pi_{GP} + \Pi_{PG}) \cdot G - [1 - \Pi_{GP} + \Pi_{PG}] \cdot (C + T - W)$$

Problema 3

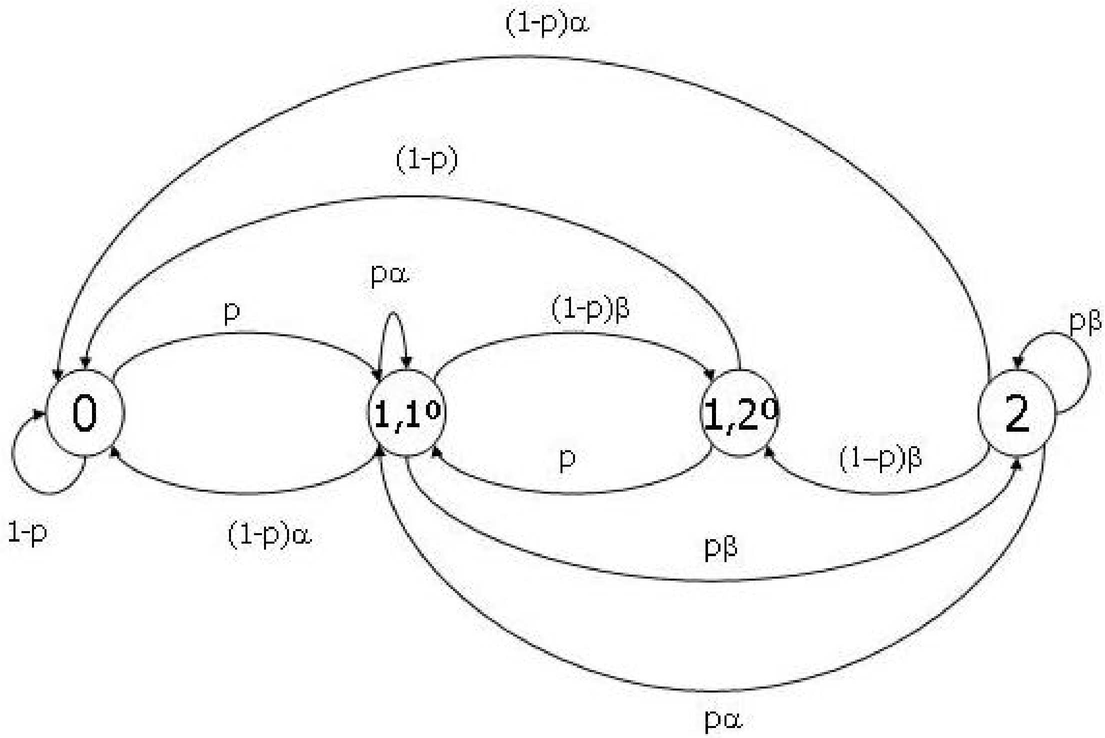
Dada la situación descrita en el enunciado la máxima cantidad de habitaciones ocupadas son 2.

Como todo problema de modelación es posible representar la situación bajo estudio de diferentes formas. En este caso, se muestra una cadena que contiene el mínimo número de estados posibles para la situación descrita.

Los estados son los siguientes:

- (0): El hotel se encuentra sin pasajeros durante la noche.
- (1,1): Hay un pasajero en el hotel, y está en su primera noche de estadía.
- (1,2): Hay un pasajero en el hotel, y está en su segunda noche de estadía.
- (2): Hay dos pasajeros del hotel. Es importante notar que cuando hay 2 psasjeros, uno de ellos está en su primera noche de estadía y el otro en la segunda noche.

La cadena se muestra en la siguiente figura:



A modo de ejemplo, a continuación se explican algunas transiciones de la cadena.

- (0)⇝(1,1): Con probabilidad p llega un cliente, el que siempre llegará a estar en su primera noche de estadía. Por ahora, no nos preocupamos si se va a quedar por una segunda noche.
- (1,1)⇝(0): Si es que no llega otro cliente (con probabilidad $1-p$) y el que está actualmente sólo iba por una noche (con probabilidad α), se vuelve al hotel vacío.
- (1,1)⇝(1,1): Si es que llega otro cliente (con probabilidad p) y el que está actualmente sólo iba por una noche (con probabilidad α), se sigue en el mismo estado.
- (1,1)⇝(1,2): Si es que no llega otro cliente (con probabilidad $1-p$) y el que está actualmente se queda por una segunda noche (con probabilidad β), se pasa al estado (1,2).
- (1,1)⇝(2): Si es que llega otro cliente (con probabilidad p) y el que está actualmente se queda por una segunda noche (con probabilidad β), se pasa al hotel con 2 habitaciones ocupadas.

El resto de las transiciones sigue la misma lógica.

Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Para calcular las probabilidades estacionarias debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones (propuesto):

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}^T \cdot P$$
$$\sum_i \pi_i = 1$$
$$\pi_i \geq 0 \quad \forall i$$

Para las partes siguientes se consideran conocidas las probabilidades estacionarias.

Para calcular los ingresos, hay que notar que en los estados (1,1) se debe cobrar una primera noche de estadía, en el estado (1,2) la segunda noche, y en el estado (2) una primera noche y una segunda.

$$E(\mathsf{Ingresos}) = A \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2) + B \cdot (\Pi_{(1,2)} + \Pi_2)$$

Por otro lado, el número promedio de habitaciones ocupadas está dado por:

$$E(\mathsf{Habit.\ ocupadas}) = 1 \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_{(1,2)}) + 2 \cdot \Pi_2$$

En primer lugar se debe calcular la esperanza de los costos. Los estados en los que se incurre en costos son el (1,1) y (2), ya que en ellos se produjo una llegada de un cliente. Luego la esperanza de los costos están dados por:

$$E(\mathsf{Costos}) = C \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2)$$

Luego la condición sobre A,B y C para que el hotel pueda financiarse en el Largo Plazo es:

$$A \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2) + B \cdot (\Pi_{(1,2)} + \Pi_2) > C \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2)$$

Cuando un cliente llega al hotel, la ocupación de este puede haber estado en cualquiera de los 4 estados de la cadena, por lo cuales necesario analizar en cuál de estos estados es posible que el huésped que llega quede sólo en el hotel para que así los dueños le enseñen a preparar el plato típico.

- Si llego y el hotel en la noche anterior estaba en el estado (0), con toda seguridad seré el único huésped en el día siguiente.
- Si llego y el hotel en la noche anterior estaba en el estado(1,2), con toda seguridad seré el único huésped en el día siguiente, yq eu el cliente que estaba por su segunda noche se irá del hotel.

Luego estos 2 casos no son relevantes para saber qué fracción de los clientes se va sin aprender a preparar el plato típico. Veamos ahora, los 2 casos restantes.

- Si llego (con probabilidad p) y el hotel en la noche anterior estaba en el estado (1,1) (con probabilidad $\Pi_(1,2)$), yo no estaré ningún día solo en el hotel en los siguientes casos.
  - Si el cliente que está actualmente decide quedarse una segunda noche (con probabilidad β) y yo me quedaré por una noche (con probabilidad α).
  - Si el cliente que está actualmente decide quedrase una segunda noche (con probabilidad β), yo por 2 noches (con probailidad β) y llega un cliente el día subsiguiente (con probabilidad p) .
- Si llego (con probabilidad p) y el hotel en la noche anterior estaba en el estado (2) (con probabilidad Π_2), yo no estaré ningún día sólo en el hotel en los siguientes casos.
  - Si el cliente que estaba actualmente en su primera noche decide quedarse una segunda noche (con probabilidad β) y yo me quedaré por una noche (con probabilidad α).
  - Si el cliente que estaba actualmente en su primera noche decide quedarse una segunda noche (con probabilidad β), yo por 2 noches (con probabilidad β) y llega un cliente el día subsiguiente (con probabilidad p).

Por simplicidad, para calcular el porcentaje de los clientes que se va sin aprender a preparar el plato supongamos que observaremos el sistema por un lapso de T días en el largo plazo (El resultado es independiente de T, es sólo para hacer más claro el razonamiento).Luego el procentaje pedido está dado por la siguiente fracción.

$$P = \frac{E(\text{Cantidad de clientes que aprendieron el plato})}{E(\text{Esperanza del Total de Clientes que llegaron al hotel })}$$

Luego el numerador lo calculamos a partir del análisis anterior y el denominador corresponde a la esparanza de llegada de clientes en el pe'riodo de T días. Finalmente:

$$P = \frac{T \cdot p \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2) \cdot (\beta\alpha + \beta^2 p)}{T \cdot p} = (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2) \cdot (\beta\alpha + \beta^2 p)$$

Problema 4

Ver pauta de la clase 8.

Dudas y/o errores:
José Guajardo
jguajard@ing.uchile.cl