DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 30 de Marzo, 2004

Problema 1

Un auxiliar de este curso ha decidido dedicarse a la música, y junto a unos amigos formó el grupo "Pepe y los Markovianos". Actualmente se limitan a tocar los fines de semana en algunos pub capitalinos, siendo una de tantas bandas desconocidas que existen en el país.

Cada mes existe una probabilidad q que un empresario de algún sello musical nacional los escuche y decida apoyarlos para grabar y realizar giras para cantar en todo el país. Si tal cosa ocurre pasarían a ser una banda conocida a nivel nacional.

Una banda que es conocida a nivel nacional corre el riesgo de perder el apoyo del sello nacional que la patrocina, con lo cual volvería a ser una banda desconocida. Cada mes, la probabilidad que esto ocurra es r. Por otro lado, una banda conocida a nivel nacional puede llegar a llamar la atención del representante de un sello musical internacional, el cual podría decidir patrocinarlos. De ser así la banda pasaría a ser conocida a nivel internacional. Cada mes existe una probabilidad s que esto ocurra ($s + r < 1$).

Una banda que es conocida internacionalmente nunca dejará de serlo. Sin embargo podemos distinguir dos categorías entre ellas: las que están de moda y las que no. Una banda internacionalmente conocida que está de moda en un mes dado seguirá estando de moda al mes siguiente con probabilidad t. Una banda conocida a nivel internacional que no está de moda en un mes dado pasará a estar de moda al mes siguiente con probabilidad u. El primer mes que una banda se hace conocida a nivel internacional nunca está de moda. Una banda sólo percibe utilidades (equivalentes a $K[\$]$) en los meses que es conocida internacionalmente y está de moda (parte de esas utilidades corresponden a una satisfacción de su ego).
Hint: Suponga $0 < x < 1 \quad \forall x \in \{q, r, s, t, u\}$.

1. Construya una cadena de Markov que represente la trayectoria de la banda de Pepe y que permita predecir si en un mes dado percibirán utilidades o no (defina estados adecuados, dibuje el grafo indicando las probabilidades de transición o bien escriba la matriz de prob. de transición).
2. ¿Llegarán "Pepe y los Markovianos" a tener éxito algún día?.
3. ¿Admite la cadena una ley de probabilidades estacionarias?.
4. ¿Qué estados tienen necesariamente una probabilidad estacionaria igual a 0?. Calcule las probabilidades estacionarias.
5. ¿Cuál es (aprox.) el valor esperado de las utilidades percibidas por "Pepe y los Markovianos" en febrero del año 2048?.

Problema 2

En un famoso casino, existe un traga monedas con sólo dos ventanas, en cada una de las cuáles puede aparecer una piña o un guinda. Dado los años de uso es sabido que la máquina está descalibrada y opera de la siguiente manera: cada vez que un jugador inserta una ficha y tira de la palanca, las dos ventanas funcionan en forma independiente. La probabilidad que en la segunda ventana a aparezca una guinda es siempre r, en cambio en la primera ventana la probabilidad que aparezca una guinda es q, si antes había aparecido una guinda, y p si antes había aparecido una piña.

El sistema de apuesta es el siguiente: Antes de ingresar la moneda de C [u.m.] usted debe predecir el resultado **exacto**[1] de la jugada. Si acierta recupera la inversión y gana G [u.m.] adicionales. De lo contrario pierde la inversión y debe pagar T [u.m.] adicionales.

1. Modele los resultados de la máquina traga monedas como una cadena de Markov en tiempo discreto. Indique claramente los estados, clases y probabilidades de transición, justificando cada una de ellas.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitiría encontrarlas (no es necesario calcularlas).
3. Suponga que usted llega al casino y encuentra el traga monedas desocupado (luego de haber sido utilizado durante "mucho" tiempo). Sin ver el estado actual de la maquina, usted escoge equiprobablemente cualquiera de los posibles resultados en que las 2 ventanas son iguales y tira de la palanca. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta jugada?. (Suponga conocidas las probabilidades estacionarias).
4. Ahora suponga que pagando W [u.m.] adicionales (inversión que no se recupera) usted puede retrasar su apuesta hasta una vez conocido el resultado de la primera ventana. Así, su decisión consiste en predecir si el resultado de la segunda ventana es igual o diferente al de la primera. Considere que su estrategia es decir siempre la figura contraria a la de la primera ventanilla y el traga monedas lleva funcionando"mucho" tiempo. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta nueva estrategia de juego bajo este nuevo sistema?.

Problema 3

Un hotel opera en un paraje montañoso de elevado atractivo turístico. Cada tarde puede llegar un nuevo cliente solicitando una habitación, lo cual ocurre con probabilidad p, o bien puede no llegar ninguno (con probabilidad $q = 1 - p$). Una fracción α de los clientes se queda en el hotel sólo una noche (llegan una tarde y se van en la mañana siguiente), mientras que una fracción $\beta = 1 - \alpha$, decide quedarse una noche más disfrutando del hermoso paisaje (i.e. llegan una tarde y se van en la mañana del día subsiguiente). Nadie pasa más de 2 noches en el hotel.

1. ¿Cuál es el máximo número de habitaciones que pueden estar ocupadas simultáneamente?.
2. Modele el estado de ocupación del hotel para cada noche (cuántas habitaciones están ocupadas) como una cadena de Markov. Defina adecuadamente los estados, e indique las probabilidades de transición entre ellos. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.
3. Suponga que el hotel le cobra a sus clientes A [\$] por la primera noche de estadía y B [\$] por noche adicional ($B < A$). ¿Cuál es el valor esperado del ingreso por noche en el largo plazo?. ¿Cuál es el número promedio de habitaciones ocupadas?.
4. Suponga que el día que un cliente llega al hotel se realiza un sanitizado de la habitación que ocupará, además se le regala un mapa de la zona y un pequeño objeto de artesanía típica del lugar (con el logo del hotel), y se le ofrece una bebida por cuenta de la casa. Todo lo anterior tiene un costo de C [\$]. ¿Qué relación deben cumplir A, B y C para que el hotel pueda financiarse en el largo plazo?.
5. Los días en que hay sólo un huésped en el hotel, los dueños se dan el tiempo de enseñarle a preparar el plato típico de la región. ¿Qué porcentaje de los clientes se va sin aprender a preparar dicho plato?.

[1] Esto es predecir correctamente la figura de la primera ventana y la figura de la segunda ventana

Problema 4

1. En una ciudad el 9 % de los días soleados son seguidos por otro día soleado y el 80 % de los días nublados son seguidos por otro día nublado. Modele este problema como una cadena de Markov.

Suponga ahora que el estado del tiempo en un día cualquiera depende del estado del tiempo en los últimos dos días, de la siguiente forma:

- Si los dos últimos días han sido soleados entonces con una probabilidad de 95 % hoy también estará nublado.
- Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, hay una probabilidad de un 70 % de que mañana esté soleado.
- Si ayer estuvo soleado y hoy nublado entonces 60 % de las veces mañana estará nublado.
- Si han pasado dos días con el cielo cubierto de nubes, hay una probabilidad de un 80 % de que las nubes quieran quedarse un día más.

2. Con esa información modele el estado del tiempo en la ciudad como una cadena de Markov.
3. Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, ¿Cuál es el número promedio de días nublados antes del próximo día soleado?.
4. Si el tiempo en un día dado dependiera del estado del tiempo en los últimos n días ¿Cuántos estados se necesitarían para modelar el tiempo como una cadena de Markov?.