Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut
Aux : C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Tarea 1
31 de Marzo, 2004

Problema 1

1. Definimos la siguiente notación:

   - 1aB: La primera temporada de Sebastián en el equipo es buena.
   - 1aM: La primera temporada de Sebastián en el equipo es mala.
   - 2aB: La segunda temporada de Sebastián en el equipo es buena.
   - 2aM: La segunda temporada de Sebastián en el equipo es mala.

   Con ello, la información que se obtiene directamente del enunciado es que:

   $$\text{P(2aB)} = 13/20$$
   $$P(1aB|2aB) = 12/13$$
   $$P(1aM|2aM) = 3/7$$

   Aplicando probabilidades totales, se tiene que:

   $$\begin{aligned} P(1aB) &= P(1aB|2aB)\cdot P(2aB) + P(1aB|2aM)\cdot P(2aM) \\ &= \tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{13}{20} + \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{7}{20} \\ &= \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, P(1aM) = 1 - P(1aB) = $\frac{1}{5}$

   Ahora utilizamos Bayes:

   $$\begin{aligned} P(2aB|1aB) &= \tfrac{P(1aB|2aB)\cdot P(2aB)}{P(1aB)} \\ &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

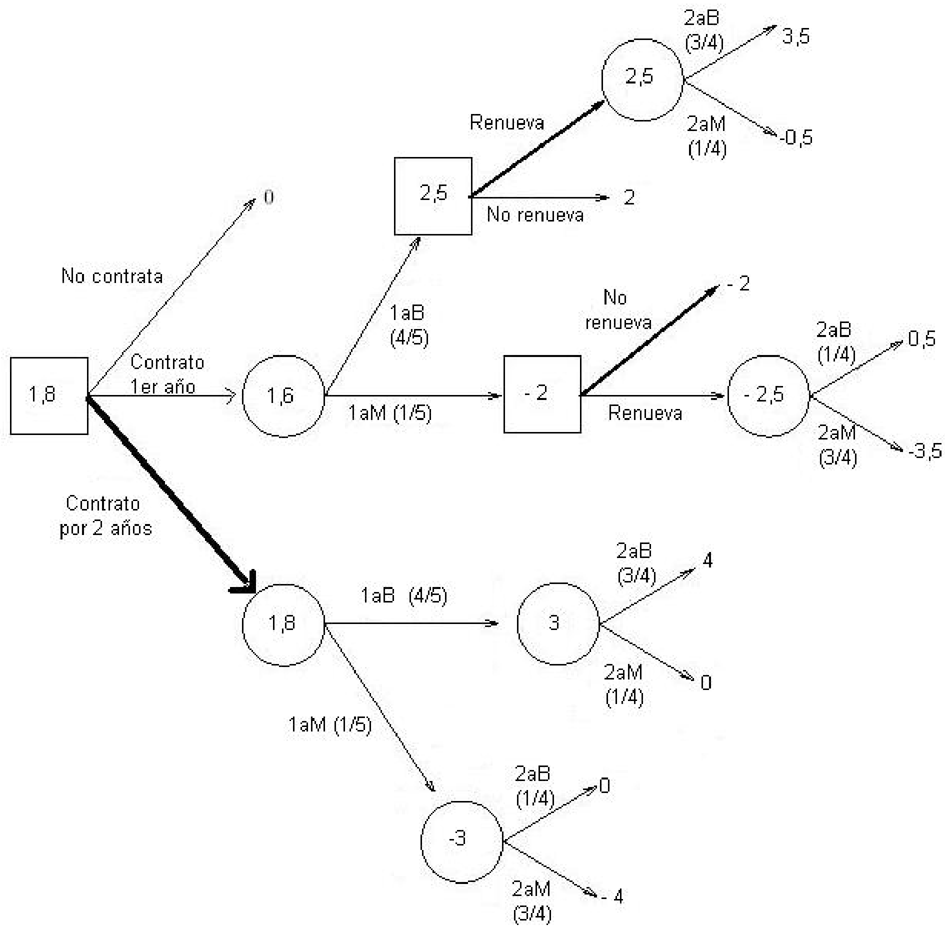
   Por lo tanto, $P(2aM|1aB) = 1 - P(2aB|1aB) = \frac{1}{4}$

   Del mismo modo, se tiene que:

   $$\begin{aligned} P(2aM|1aM) &= \tfrac{P(1aM|2aM)\cdot P(2aM)}{P(1aM)} \\ &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

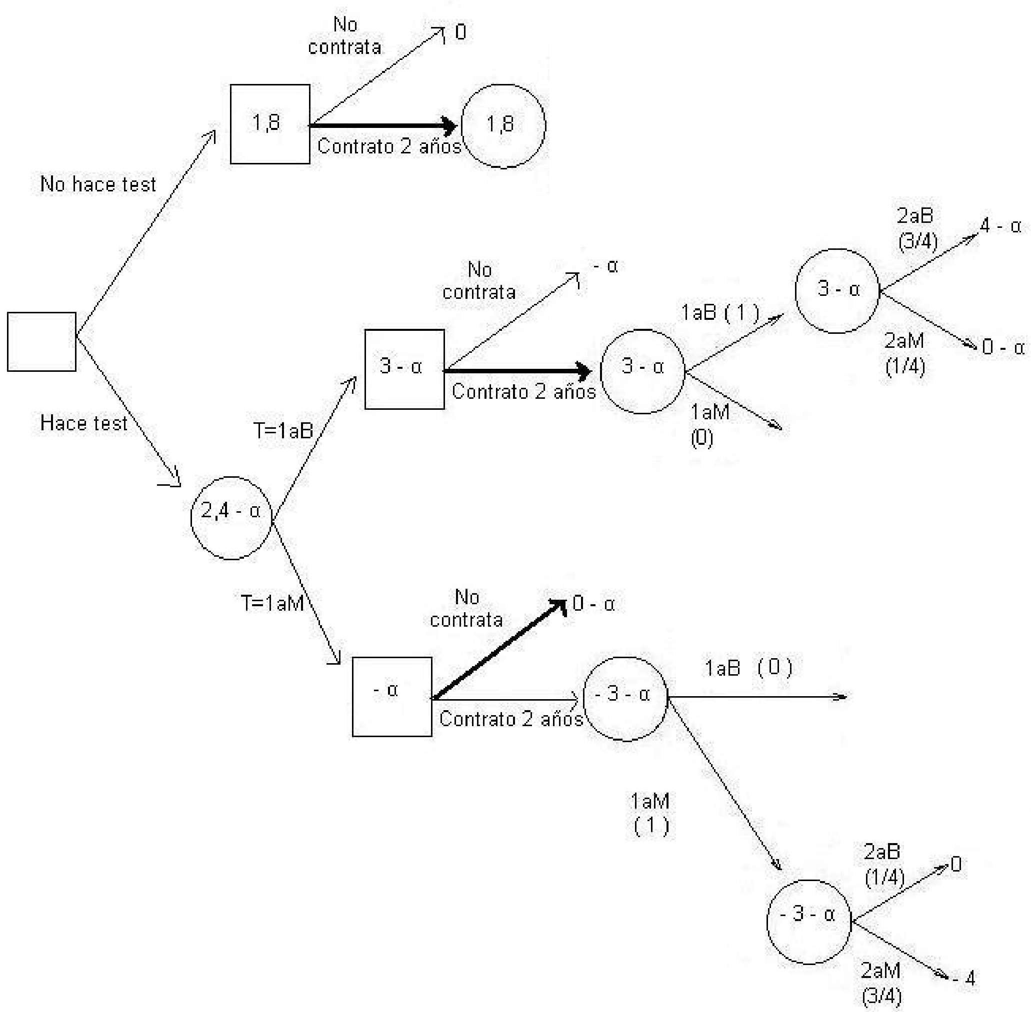
   Por lo tanto, $P(2aB|1aM) = 1 - P(2aM|1aM) = \frac{1}{4}$

   De acuerdo a los cálculos anteriores y teniendo en cuenta los ingresos y costos incurridos en cada secuencia, el árbol de decisión asociado al problema es el siguiente:



Entonces, la estrategia óptima es contratar al jugador por 2 años.

2. Sea α el valor del examen. Entonces el árbol de decisión asociado al problema es el siguiente:



Entonces, la esperanza de las utilidades con el examen es:

$$\begin{aligned}
\text{E(Ut con ex)} &= (3-\alpha)\cdot P(T=1aB) - \alpha \cdot P(T=1aM) \\
&= (3-\alpha)\cdot \tfrac{4}{5} - \alpha \cdot \tfrac{1}{5} \\
&= \tfrac{12}{5} - \alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el máximo valor por el cual el club está dispuesto a pagar el examen es tal que: $\frac{12}{5} - \alpha > 1{,}8 \Rightarrow \alpha < 0{,}6$

Problema 2

1. Definimos la siguiente notación:
   - F: Control está fácil.
   - M: Control está mediano.
   - D: Control está difícil.
   - DF: Profesor dice que el control está fácil.
   - DM: Profesor dice que el control está mediano.

- DD: Profesor dice que el control está difícil.

Aplicando probabilidades totales, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(DF) &= P(DF|F)\cdot P(F) + P(DF|M)\cdot P(M) + P(DF|D)\cdot P(D) \\ &= 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}5 + 0{,}1\cdot 0{,}2 \\ &= 0{,}36 \end{aligned}$$

Del mismo modo se puede obtener que P(DM) = 0.44 y P(DD) = 0.2

Ahora utilizamos Bayes:

$$\begin{aligned} P(F|DF) &= \tfrac{P(DF|F)\cdot P(F)}{P(DF)} \\ &= \tfrac{0{,}8\cdot 0{,}3}{0{,}36} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

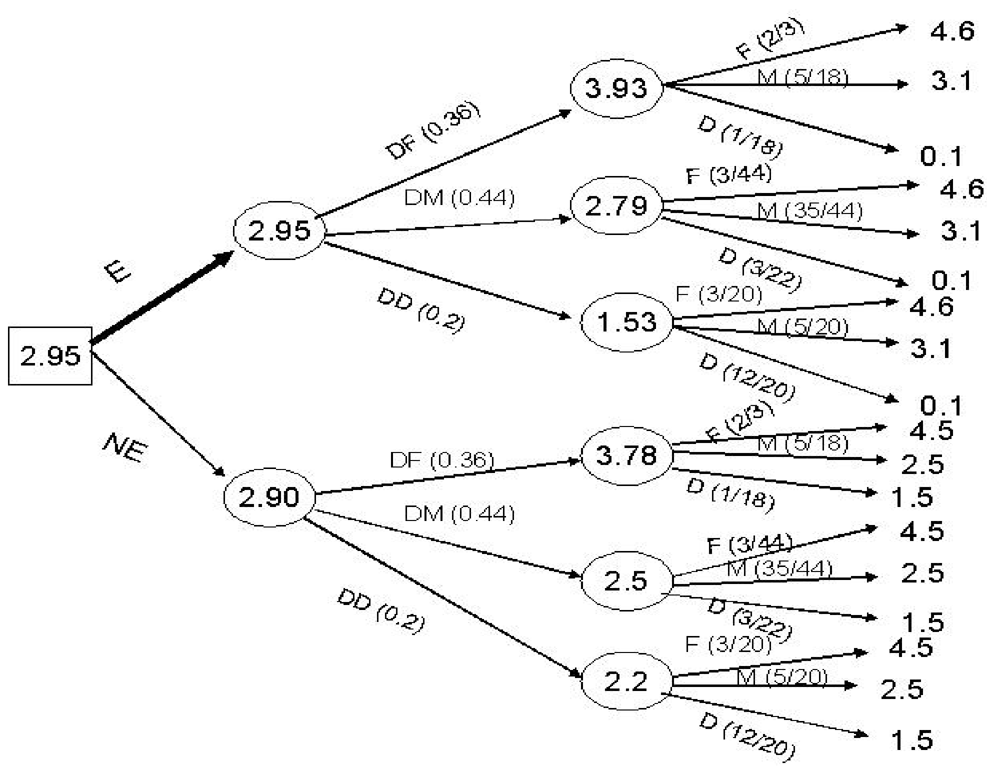
$$\begin{aligned} P(M|DF) &= \tfrac{P(DF|M)\cdot P(M)}{P(DF)} \\ &= \tfrac{0{,}2\cdot 0{,}5}{0{,}36} = \tfrac{5}{18} \\ \text{Luego, } P(D|DF) &= 1 - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{18} = \tfrac{1}{18} \end{aligned}$$

Procediendo análogamente se obtiene que:

$P(F|DM) = \frac{3}{44}, P(M|DM) = \frac{35}{44}, P(D|DM) = \frac{3}{22}$

$P(F|DD) = \frac{3}{20}, P(M|DD) = \frac{5}{20}, P(D|DD) = \frac{12}{20}$

Notar que la decisión del alumno sólo consiste en estudiar o no estudiar. El hecho de que el profesor diga anticipadamente su apreciación sobre la dificultad del control sólo afecta las probabilidades asociadas a las ramas del árbol. Con esto y los cálculos realizados anteriormente, el árbol que se obtiene es el siguiente:

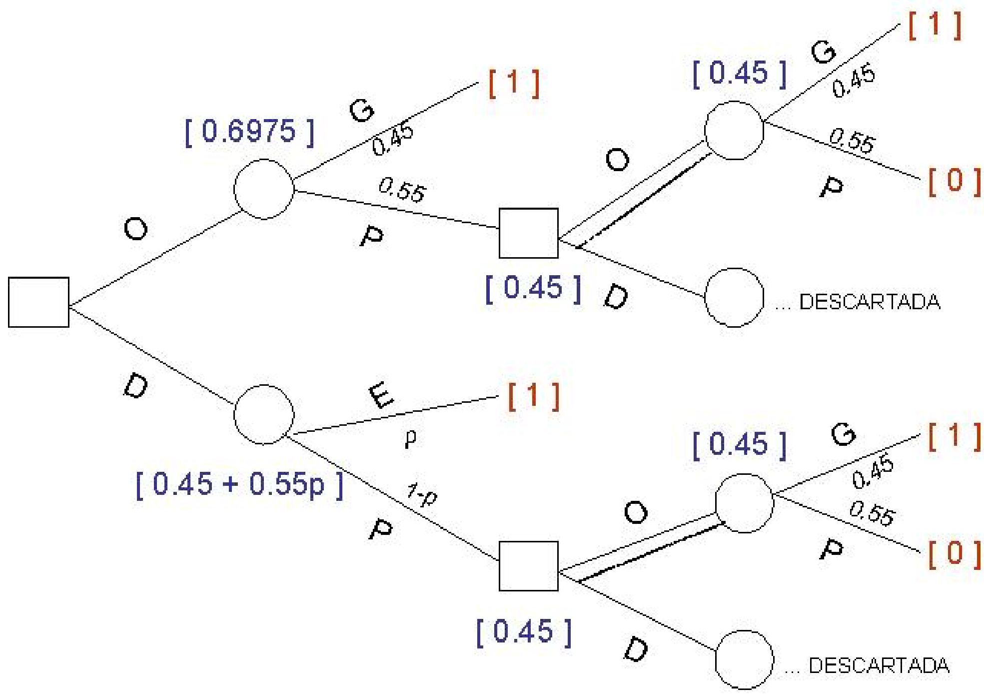


La estrategia óptima es estudiar para el examen.

2. **Propuesto.**

Problema 3

1. Lo primero es darse cuenta que si hay desempate, podemos descartar la opción jugar a la Defensiva, pues siempre el valor esperado de ganar la copa será menor que el que se obtiene al jugar a la Ofensiva. Luego, el árbol que resuelve el técnico del equipo A es el que se muestra a continuación:



El técnico decidirá jugar el segundo partido (el primero del árbol) a la ofensiva si:

$$0{,}45 \cdot 0{,}55 + 0{,}45 \cdot 1 = 0{,}6975 > 0{,}45 + 0{,}55 \cdot p$$
$$p < 0{,}45$$

Luego, la estrategia óptima es la siguiente:

- Si $p < 0{,}45$, entonces siempre jugar a la Ofensiva
- Si $p > 0{,}45$, entonces jugar segundo partido a la Defensiva y, de haber desempate, jugar a la Ofensiva
- Si $p = 0{,}45$, es indiferente jugar segundo partido a la Ofensiva o Defensiva y, de haber desempate, lo juego a la Ofensiva

2. Si $p = 0{,}5$, sabemos que el equipo A jugará a la Defensiva el segundo partido. Luego, la probabilidad que el equipo A gane la copa será:

$$P(\text{A Gane Copa}) = P(\text{A Empata 2do partido}) + P(\text{A pierde 2do partido}) \cdot P(\text{A gana Desempate})$$
$$P(\text{A Gane Copa}) = 0{,}5 + (1 - 0{,}5) \cdot (0{,}45)$$
$$P(\text{A Gane Copa}) = 0{,}725$$

Luego,

$$P(\text{B Gane Copa}) = 0{,}275$$

Problema 4

1. Definimos la siguiente notación:

   - B: Terreno está bueno.
   - M: Terreno está malo.
   - T=B: Test dice que el terreno actual está bueno.
   - T=M: Test dice que el terreno actual está malo.

   Con ello, la información que se obtiene directamente del enunciado es que:

$$\begin{gathered}\text{P(Terreno actual B)} = 0{,}4\\ \text{P(Terreno diferente B)} = 0{,}5\\ P(T=B|B) = 16/20 = 0{,}8\\ P(T=M|M) = 6/10 = 0{,}6\end{gathered}$$

   Aplicando probabilidades totales, se tiene que:

$$\begin{aligned}P(T=B) &= P(T=B|B)\cdot P(B) + P(T=B|M)\cdot P(M)\\ &= 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}4\cdot 0{,}6\\ &= 0{,}56\end{aligned}$$

   Por lo tanto, P(T=M) = 1 - P(T=B) = 0,44

   Ahora utilizamos Bayes:

$$\begin{aligned}P(B|T=B) &= \tfrac{P(T=B|B)\cdot P(B)}{P(T=B)}\\ &= \tfrac{0{,}8\cdot 0{,}4}{0{,}56} = 0{,}571\end{aligned}$$

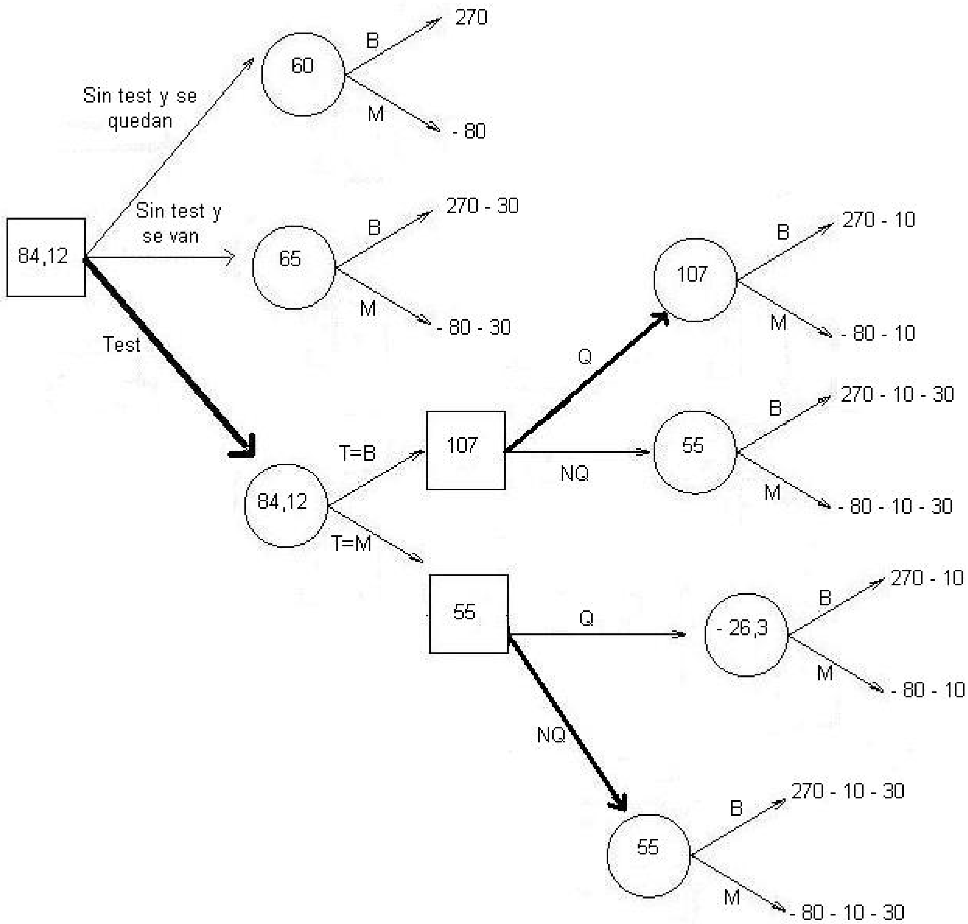
   Por lo tanto, $P(M|T=B) = 1 - 0{,}571 = 0{,}429$

   Del mismo modo, se tiene que:

$$\begin{aligned}P(M|T=M) &= \tfrac{P(T=M|M)\cdot P(M)}{P(T=M)}\\ &= \tfrac{0{,}6\cdot 0{,}6}{1-0{,}56} = 0{,}818\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $P(B|T=M) = 1 - 0{,}818 = 0{,}182$

   De acuerdo a los cálculos anteriores y teniendo en cuenta el número de votos ganados y perdidos en cada secuencia, el árbol de decisión asociado al problema es el siguiente (notación: Q= Se quedan en el terreno actual; NQ= No se quedan y emigran a un lugar diferente):



Entonces, la política óptima es hacer el test. Si éste dice que el terreno actual estará bueno la próxima temporada, la tribu se queda; si el test dice que el terreno estará malo, se decide emigrar a un lugar diferente.

2. La información perfecta es tal que $P(B|T = B) = 1$ y $P(M|T = M) = 0$. Denotando por α al precio en votos del test, se tiene que:

   - La tribu se queda cuando el test dice que el terreno actual estará bueno y obtiene una utilidad de $270 - \alpha$.
   - La tribu no se queda cuando el test dice que el terreno actual estará bueno y obtiene una utilidad de $270 - 30 - \alpha$.

   Entonces, la esperanza de las utilidades en este caso es:

   $$\text{E(Ut info perfecta)} \quad = \quad (270 - \alpha) \cdot 0{,}4 - (270 - 30 - \alpha) \cdot 0{,}6 = 252 - \alpha$$

   Por lo tanto, el máximo número de votos que el jefe de la tribu está dispuesto a sacrificar por la información perfecta es tal que: $252 - \alpha > 84{,}12 \Rightarrow \alpha < 167{,}88 \Rightarrow$A lo más sacrifica 167 votos.

Comentarios y/o Consultas:
Mario Guajardo.
mguajard@ing.uchile.cl