DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 24 de Marzo, 2004

Problema 1

1. Para desarrollar el problema necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+	=	Test indica pieza mala.
T-	=	Test indica pieza buena.
P	=	Parar de producir.
NP	=	continuar la producción.
A	=	Empresa tipo A.
B	=	Empresa tipo B.

De esta forma se tiene que:

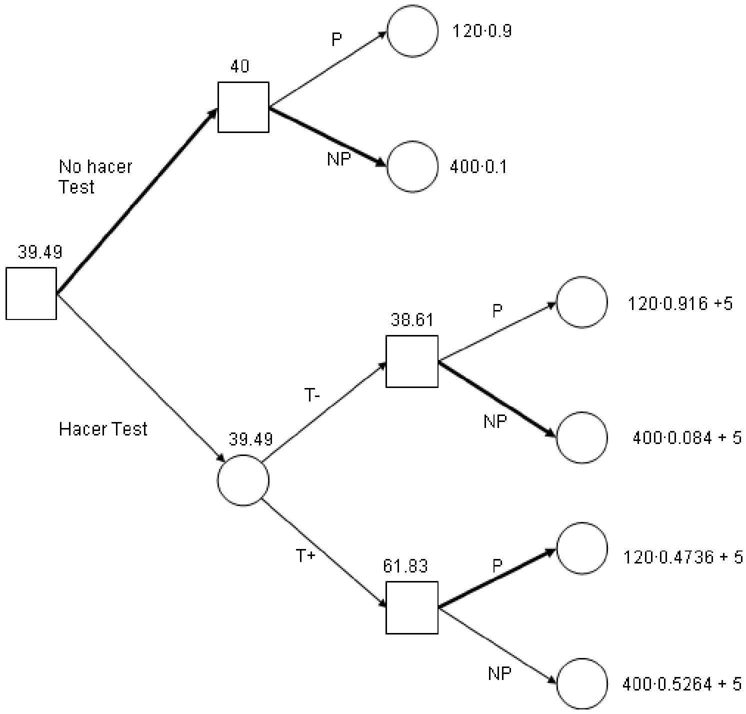
$$\begin{aligned} P[T+|A] &= 0{,}02 = 1 - P[T-|A] \\ P[T+|B] &= 0{,}2 = 1 - P[T-|B] \\ P[T+] &= P[T+|A]\cdot P[A] + P[T+|B]\cdot P[B] \\ &= 0{,}02\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}038 \\ \Rightarrow P[T-] &= 0{,}962 \end{aligned}$$

Además:

$$P[A|T+] = \frac{P[T+|A]P[A]}{P[T+]} = \frac{0{,}018}{0{,}038} = 0,4736 = 1 - P[B|T+]$$

$$P[A|T-] = \frac{P[T-|A]P[A]}{P[T-]} = \frac{0{,}882}{0{,}962} = 0,916 = 1 - P[B|T-]$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.

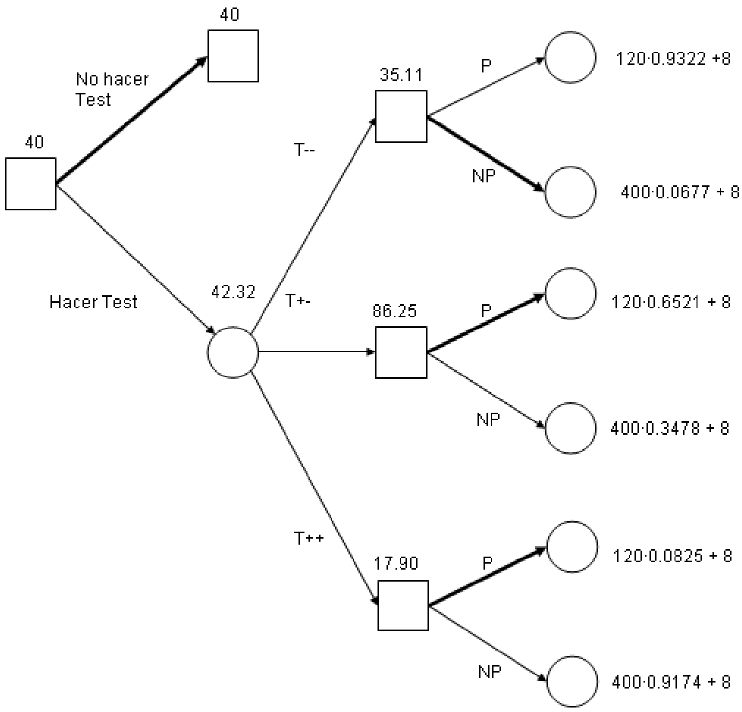


Noten que conviene realizar el test.

2. La idea es exactamente la misma, solamente que debemos calcular las siguientes probabilidades:

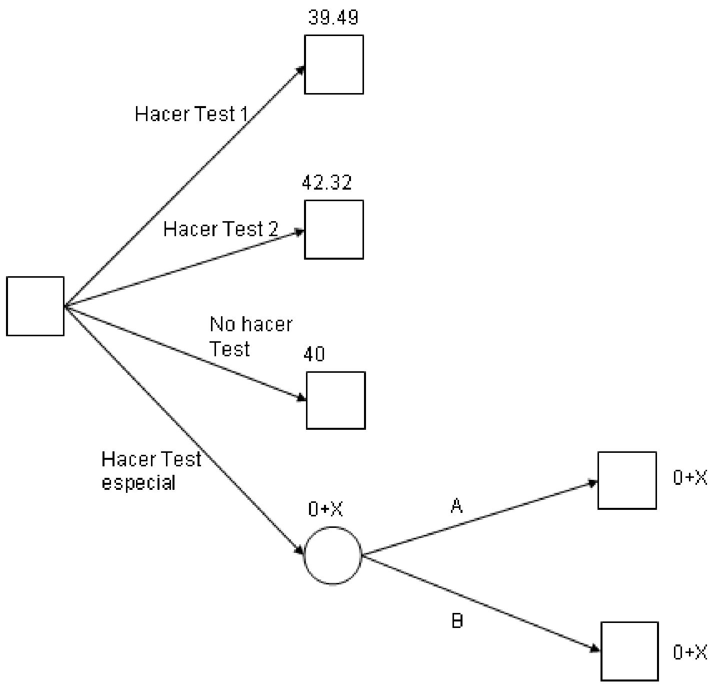
$$\begin{aligned}
P[T++] &= 0{,}0004 \cdot 0{,}9 + 0{,}04 \cdot 0{,}1 = 0{,}00436 \\
P[T--] &= 0{,}978 \cdot 0,9 + 0{,}64 \cdot 0{,}1 = 0{,}9442 \\
P[T+-] &= 0{,}0541 \\
P[A|T++] &= \frac{0{,}0004 \cdot 0{,}9}{0{,}00436} = 0{,}0825 == 1 - P[B|T++] \\
P[A|T--] &= \frac{0{,}978 \cdot 0{,}9}{0{,}9442} = 0{,}9322 == 1 - P[B|T--] \\
P[A|T+-] &= \frac{(2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02) \cdot 0{,}9}{0{,}0541} = 0{,}6521 = 1 - P[B|T+-]
\end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.



Notar que esta vez no conviene realizar el test.

3. Para ver cual es el valor de la información perfecta considere un test que clasifica correctamente a las empresas y cuyo valor es X. El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.

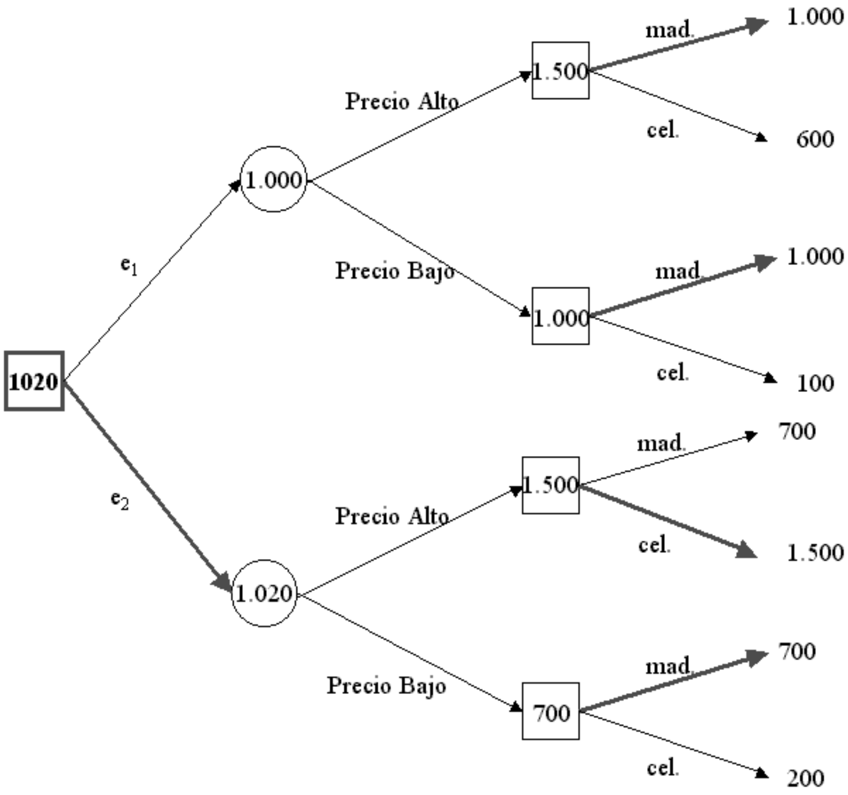


Entonces el valor de este test especial será 39.49.

Problema 2

1. Lo máximo que puedo llegar a ganar es \$1.500, si es que planta e_2 y el precio de la celulosa es alto.

   Para estudiar la mejor decisión dada la información disponible se tiene el árbol de la siguiente figura:

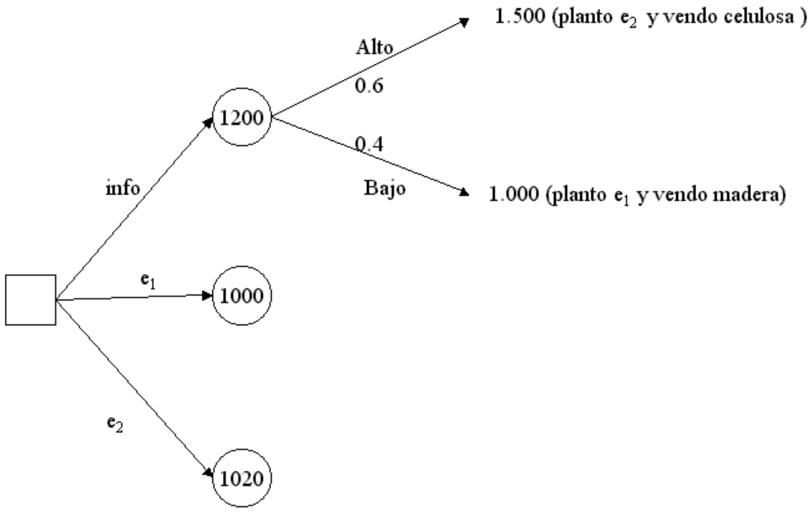
   

   De lo anterior se tiene que la decisión óptima es plantar e_2, si el precio es alto vender celulosa y si es bajo madera. Esta política tiene un valor esperado de los beneficios de \$1.020.

2. De la parte 1, vimos que la decisión óptima con la información disponible es plantar e_2. Si me dicen que el precio es alto no voy a cambiar mi decisión, pero si me dicen que es bajo elegiré plantar e_1, ganando $1.000 - 700 = 300$.

   Como lo anterior ocurrirá con probabilidad 0.6, se tiene que el beneficio adicional por tener esta información es: $300 \cdot 0.6 = \$180$, por lo tanto lo máximo que estará dispuesto a pagar por la información es \$180.

Otra forma de verlo se muestra en el siguiente árbol:



Luego el precio a pagar por la información (P_{inf}) debe satisfacer:

$$P_{inf} \leq 1{,}500 \cdot 0{,}4 + 1{,}000 \cdot 0{,}6 - 1020 = 180$$

3. De los datos del enunciado se tiene que:

$$P[\text{Precio Alto/Dice Alto}] = 0{,}9$$
$$P[\text{Precio Bajo/Dice Bajo}] = 0{,}8$$

Aplicando probabilidades totales se tiene que:

$$P[\text{Precio Alto}] = P[\text{Precio Alto/Dice Alto}]\cdot P[\text{Predice Alto}] + P[\text{Precio Alto/Predice Bajo}]\cdot P[\text{Dice Bajo}]$$

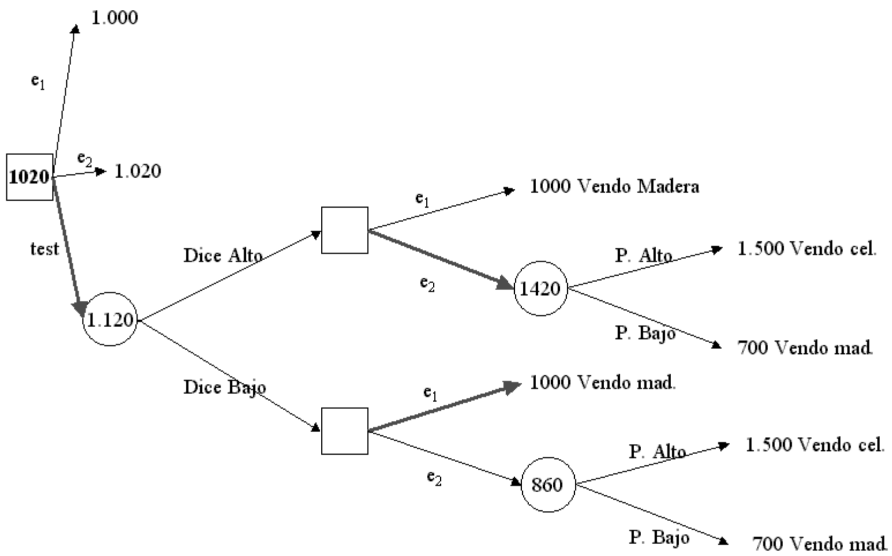
Donde las únicas incógnitas son $P[\text{Dice Alto}]$ y $P[\text{Dice Bajo}]$, pero se tiene que:

$$P[\text{Dice Alto}] = 1 - P[\text{Dice Bajo}]$$

De lo cuál se obtiene que:

$$P[\text{Dice Alto}] = \frac{2}{7}$$
$$P[\text{Dice Bajo}] = \frac{5}{7}$$

Luego se tiene el siguiente árbol. Otra forma de verlo se muestra en el siguiente árbol:



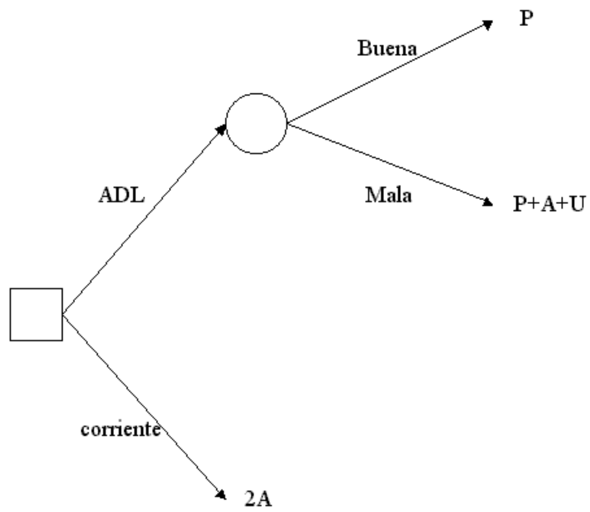
Luego lo máximo que estará dispuesto a pagar por la adivina (P_{adiv}), debe satisfacer que:

$$P_{adiv} \leq 100$$

Problema 3

1. Analizaremos este problema para una incubadora en el horizonte de interés de 4 semenas. El avicultor se puede ver enfrentando a los siguientes costos:

   - \$2A : Si compra una ampolleta corriente.
   - \$P : Si compra una ALD y ésta no falla.
   - \$(P+A+U): Si compra una ALD y ésta falla.
     Luego para determinar el máximo precio que estaría dispuesto a pagar por una ALD cuya probabilidad de ser perfecta es q ($P^*_{ALD,q}$), debemos resolver el siguiente árbol.



   De lo anterior se tiene que para comprar un ALD, se debe satisfacer que:

$$VE[\text{ALS}] \leq VE[\text{Corriente}]$$
$$q \cdot P + (1-q) \cdot (P + A + U) \leq 2 \cdot A$$

   De lo cual se obtiene que:

$$P_{ALD,q} \leq A \cdot (1+q) - U \cdot (1-q)$$

2. Definamos los siguientes eventos:
   B=ALD está buena y $\therefore$ durará 4 semanas
   M=ALD está mala y $\therefore$ durará sólo 2 semanas
   TB=Test acepta la ALD
   TM=Test rechaza la ALD

   Luego la probabilidad de que la ampolleta dure 4 semanas dado que el Test la acepta está dado por:

$$P[B/TB] = \frac{P[TB/B] \cdot P[B]}{P[TB]}$$

   Del enunciado sabemos que:

$$P[TB/B] = 1$$
$$P[TB/M] = \gamma$$

$$P[B] = q$$
$$P[M] = 1 - q$$

Por probabilidades totales se tiene que:

$$P[TB] = P[TB/B] \cdot P[B] + P[TB/M] \cdot P[M] = 1 \cdot q + (1 - \gamma) \cdot (1 - q) = 1 - \gamma \cdot (1 - q)$$

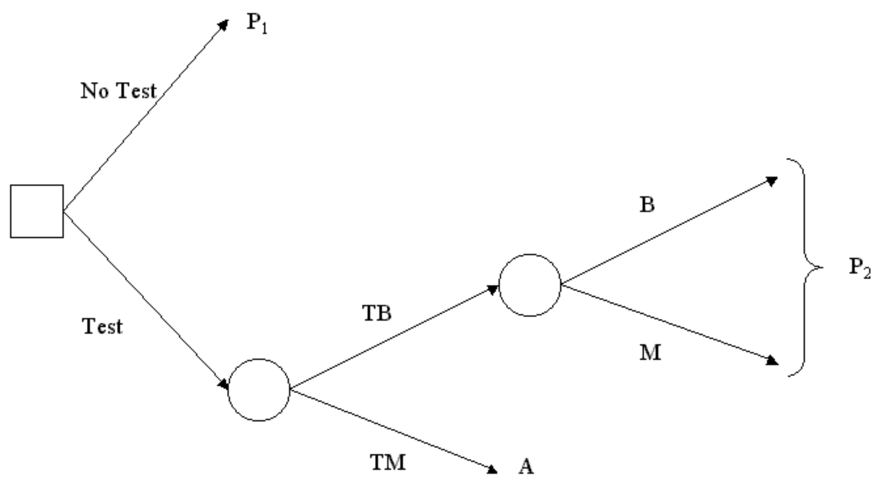
Finalmente se tiene que:

$$P[B/TB] = \frac{q}{1 - \gamma \cdot (1 - q)} = q^{test}$$

Luego la leyenda de la leyenda del embalaje de la ampolleta ALD debería decir algo como:

"Esta ampolleta durará 4 semanas con probabilidad q^{test}"

3. Desde el punto de vista de AINTSA, se tiene el siguiente árbol de decisión, donde el beneficio está dado por el precio que está dispuesto a pagar el avicultor por una ampolleta.



P_1, representa el precio que está dispuesto a pagar el avicultor si no se realiza el test con lo que la probabilidad de que la ALD dure 4 semanas es q, el cuál fue calculado en la parte 1 y es igual a:

$$P_1 = A \cdot (1 + q) - U \cdot (1 - q)$$

P_2, representa la disposición a pagar del avicultor si se realiza el test. En este caso la probabilidad de que la ALD dure 4 semanas es q^{test}. Dado que el resultado de la parte 1 está en función de q, se tiene que:

$$P_2 = A \cdot (1 + q^{test}) - U \cdot (1 - q^{test})$$

Además si la ampolleta es rechazada por el test durará 2 semanas y su valor comercial es el de una ampolleta corriente, igual a \$A.

Luego se tiene que:

$$VE[\text{test}] = -C + P_2 \cdot P[TB] + A \cdot [TM]$$

$$VE[\text{no test}] = P_1$$

Luego para que a AINTSA le convenga hacer el Test se debe cumplir que:

$$VE[\text{test}] \leq VE[\text{no test}]$$

Reemplazando los datos se tiene que la condición queda como sigue:

$$C \leq U \cdot \gamma \cdot (1-q)$$

4. En este caso debemos comparar los ingresos esperados considerando $g(q)$:

   - Si no realiza el test, se tiene que:

$$VE[\text{no test}] = P_1(q) - g(q)$$

   - Si se realiza el test, se tiene que:

$$VE[\text{test}] = -C + P_2(q^{test}) \cdot (1 - \gamma \cdot (1-q)) + A \cdot \gamma \cdot (1-q) - g(q)$$

   La realización del test sigue dependiendo de la relación de la parte 3.
   Para elegir la calidad óptima se deben resolver los 2 problemas siguientes y seguir la política con mayor valor esperado.

$$\max_q \; VE[\mathsf{test}]$$

$$\max_q \; VE[\mathsf{no\ test}]$$

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl