Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Solución Clase Auxiliar 23 de Marzo, 2004

Problema 1

1. De la figura 1 se ve que el precio máximo es $v = 35$.

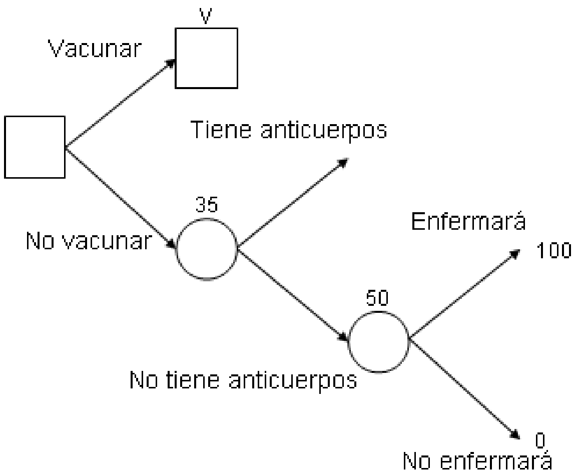

Figura 1: Arbol problema 1.1

2. Sean:

A	=	Persona con anticuerpos.
S	=	Persona sin anticuerpos.
TA	=	Test dice persona tiene anticuerpos.
TS	=	Test dice persona no tiene anticuerpos.

Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} P[A] & = & 0{,}3 & P[S] & = & 0{,}7 \\ P[TS|A] & = & 0{,}1 & P[TA|A] & = & 0{,}9 \\ P[TS|S] & = & 1-p & P[TA|S] & = & p \end{array}$$

Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[TA] = P[TA|A] \cdot P[A] + P[TA|S] \cdot P[S] = 0{,}7p + 0{,}27 = 1 - P[TS]$$

Por otro lado tendremos que:

$$P[S|TS] = \frac{P[TS|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}7 - 0{,}7p}{0{,}73 - 0{,}7p} = 1 - P[A|TS]$$

$$P[S|TA] = \frac{P[TA|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}27}{0{,}27 + 0{,}7p} = 1 - P[A|TA]$$

El árbol resultante se muestra en la figura 2.

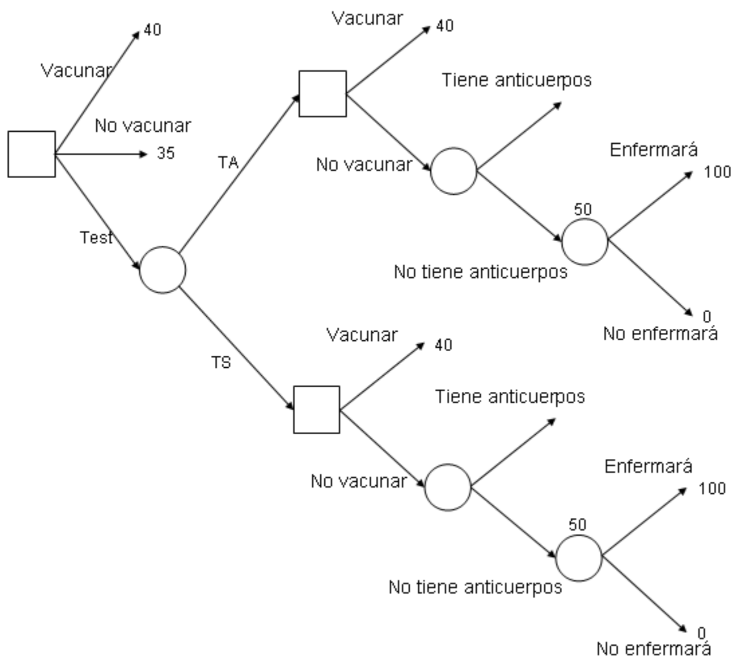

Figura 2: Arbol problema 1.2

Donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{35p}{0{,}27 + 0{,}7p} < 40 \Rightarrow p < \frac{10{,}8}{7} \\
\beta &= \frac{35 - 35p}{0{,}73 - 0{,}7p} > 40 \Rightarrow p < 0{,}829 \\
\delta &= 35p + (0{,}73 - 0{,}7p) \cdot 40
\end{aligned}$$

3. Propuesto

Problema 2

1. El árbol de decisión asociado a este problema es el que se muestra en la figura 3.

   La opción del tratamiento preventivo entrega una ganancia segura de 0(u.m.). Por otro lado la opción de jugar entrega una utilidad esperada de $6000p - 5000(u.m.)$. Es así como la estrategia óptima será la que reporte una mayor utilidad (esperada). Entonces se tendrá que:

$$B_0(p) = (6000p - 5000)^+$$

2. Para desarrollar este punto necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+	=	Test positivo.
T-	=	Test negativo.
E	=	Enfermo.
NE	=	No enfermo.

   Entonces:

$$P[T + |NE] = 0 = 1 - P[T - |NE]$$
$$P[T + |E] = \beta = 1 - P[T - |E]$$

Entonces mediante probabilidades totales:

$$P[T+] = \beta(1-p) = 1 - P[T-]$$

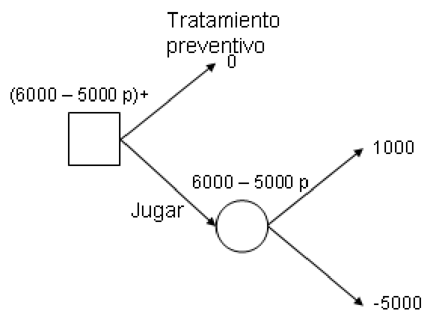

Figura 3: Arbol problema 2.1

Entonces, aplicando Bayes:

$$P[E|T+] = 1 = 1 - P[NE|T+]$$

$$P[E|T-] = \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p} = 1 - P[NE|T-]$$

De acuerdo a esto el árbol de decisión es el que se muestra en la figura 4.

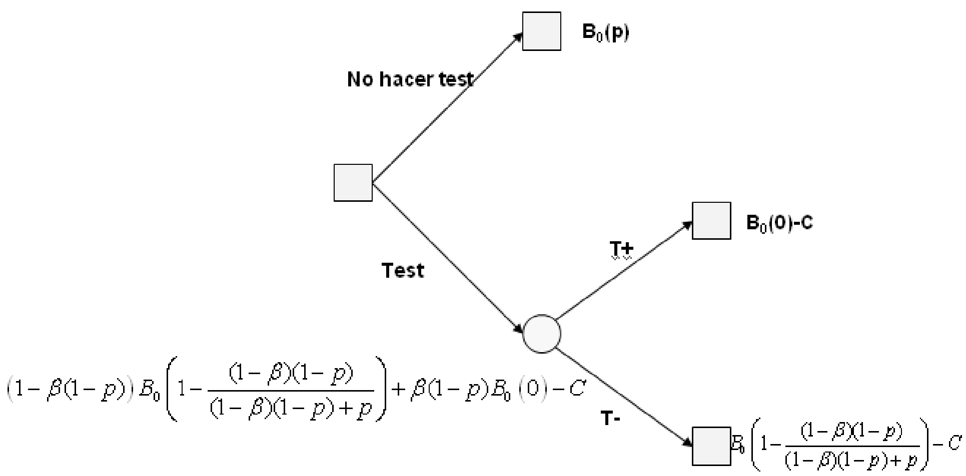

Figura 4: Arbol Problema 2.2

Entonces se tiene que la utilidad esperada en el caso de hacer el test será:

$$E[\text{U Hacer test}] = (1-\beta(1-p))B_0\left[1 - \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p}\right] + \beta(1-p)B_0[0]) - C$$

Entonces el valor de la estrategia óptima será:

$$B_1(p,\beta,C) = \text{máx}\left\{(1-\beta(1-p))B_0\left[1 - \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p}\right] + \beta(1-p)B_0[0]) - C, B_0(p)\right\}$$

Sin embargo, si asumimos que $p > \frac{5}{6}$ entonces, dado que:

$$\begin{aligned} B_0(p) &= 1000(6p-5) \quad \text{si} \quad p > \frac{5}{6} \\ B_0(p) &= 0 \qquad\qquad\quad \text{si} \quad p \leq \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Se tendrá que:

$$B_1(p,\beta,C) = \text{máx}\left\{(1-\beta(1-p))1000\left[6 - 6\frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p} - 5\right] + -C, 1000(6p-5)\right\}$$

3. El test 1 siempre será utilizado, dado que su costo es 0. Esto es porque aunque no entregue información adicional (cosa que sí hace puesto que si entrega un resultado positivo, con seguridad sabemos que la persona está enferma) el hecho que no cueste dinero, a lo más deja el problema invariante.

4. Es importante notar que, dado que siempre se utiliza el test 1, el problema comienza con los resultados de éste, y los problemas que se enfrentan luego de los resultados, son los mismos enfrentados en la parte anterior pero considerando otra probabilidad de enfermedad inicial.

   De esta forma la utilidad esperada será:

$$E[U] = B_1(0,\beta_2,C_2)\cdot\beta_1(1-p) + B_1(1-\frac{(1-\beta_1)(1-p)}{(1-\beta_1)(1-p)+p},\beta_2,C_2)\cdot 1-(\beta_1(1-p))$$

Problema 3

1. Lo primero es notar que los puntos no tienen nada que ver en la probabilidad de ganar la copa.

   Las decisiones que el técnico del equipo A puede tomar antes de empezar un partido es la manera en que va a jugar, y debe considerar que, a priori, las formas que el equipo A salga campeón son:

   - Gane el primero y empate o gane el segundo
   - Gane el primero, pierda el segundo y gane el definitorio
   - Pierda el primero, gane el segundo y gane el definitorio
   - Empate el primero y gane el segundo

   El árbol de decisión asociado se muestra en la figura 5

   Notación:

   - D = Jugar el partido defensivamente, O = Jugar el partido ofensivamente
   - G = Ganar 1 partido, E = Empatar 1 partido, P = Perder 1 partido

   Notar que si después de los 2 primeros partidos están empatados, al equipo 1 no le conviene elegir la estrategia defensiva, puesto que por esa vía no puede ganar la copa y con probabilidad < 1 sólo estará igual después de finalizar el encuentro (o empata o pierde). De esta manera lo que en un principio parecía un árbol infinito no le es.

   De esta manera vemos que la estrategia óptima es salir jugando a la ofensiva, después si el equipo A gana, basta el empate para ganar la copa. Por otra parte, si pierde, sólo le sirve un triunfo para poder ganar la copa.

   Si parte jugando a la defensiva, lo mejor que puede pasar es que empate y luego necesita un triunfo, y con esta estrategia tiene una menor probabilidad de ganar.

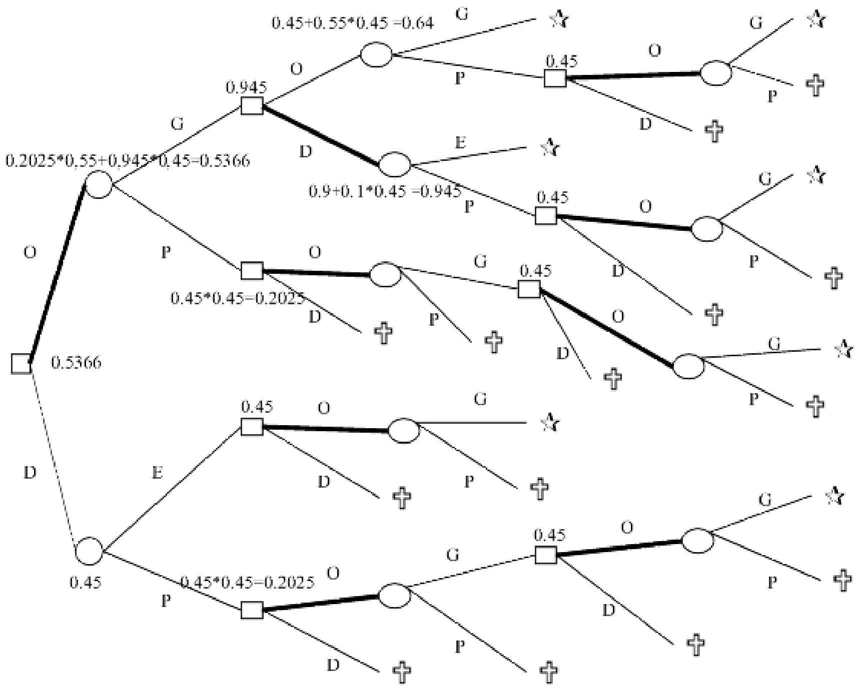

Figura 5: Arbol problema 3

2. Curiosamente, el equipo con mayor probabilidad de ganar es el A, a pesar de ser peor que B (lo cual puede observarse en que la probabilidad de ganar 1 partido es menor para el equipo A con ambas estrategias). Esto se debe a que el equipo A tiene la opción de elegir cómo jugar después de conocer el resultado de cada partido. Poder adecuar su estrategia es lo que le da la ventaja.

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl