Modelos de Decisión en Ambientes Inciertos

(Apunte de Clases para el Curso Investigación Operativa IN44A)

Departamento de Ingeniería Industrial - Universidad de Chile

René A. Caldentey   Susana V. Mondschein [1]

Enero, 1999

[1]La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 7

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

El estudio de cadenas de Markov que hasta este momento hemos realizado se ha concentrado en aquellos procesos estocásticos compuestos por un número finito de estados y cuya evolución en el tiempo está representada por un conjunto discreto de instantes. Ahora bien, en muchos problemas prácticos conocer el comportamiento del sistema en instantes específicos del tiempo no es suficiente, pues el sistema puede cambiar su condición en cualquier instante del tiempo.

Por ejemplo, consideremos la operación de un equipo a través del tiempo el cual falla en forma aleatoria y supongamos que modelamos el estado del equipo al final de cada semana como una cadena de Markov en tiempo discreto con objeto de predecir su evolución futura. Con dicha formulación estaremos suponiendo que el estado del equipo permanece invariante a lo menos durante una semana completa; el tiempo que el equipo permanece sin fallar estará siendo modelado como una variable aleatoria discreta con una distribución geométrica (en número de semanas), lo cual puede ser bastante alejado de la realidad. Lo que realmente estamos interesados en describir es cuál será el itinerario que seguirá el estado del equipo a través del tiempo, es decir, determinar en qué momentos fallará. Claramente la incertidumbre asociada a las fallas imposibilita conocer a priori este itinerario, por lo que se debe buscar una caracterización probabilística, es decir, determinar la probabilidad a priori que el equipo esté operando en un instante cualquiera del tiempo.

En este capítulo se formulará un modelo que permita resolver algunos problemas como el anterior. Este modelo es un caso particular de procesos estocásticos en tiempo continuo y se conoce como *Cadenas de Markov en Tiempo Continuo.*

7.1 Formulación

Recordemos que un proceso estocástico en tiempo continuo en un conjunto de estados E discreto es una colección de variables aleatorias a valores en E, $\{X_t \ : t \in I\!R\}$. Para describir en probabilidad un proceso estocástico de este tipo se debe conocer la ley de probabilidades para X_t para cualquier instante futuro t y condicional en la información que se disponga respecto de la historia pasada del proceso, vale decir conocer

$$\Pr[X_{t_{n+1}} = E_i \,|X_{t_1} = E_j, X_{t_2} = E_k, ..., X_{t_n} = E_l]$$

$$\begin{gathered} \forall n \in I\!N \\ \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} \\ \forall E_i, ..., E_l \ \in \ E \end{gathered}$$

Dichas leyes de probabilidad pueden llegar a ser extremadamente complejas. Imponiendo un supuesto simplificatorio llamado *condición de Markov* se da origen a un grupo de procesos estocásticos en tiempo continuo denominado *cadenas de Markov en Tiempo Continuo.*

Definición 7.1 (Cadena Markov en Tiempo Continuo)
Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X_t \ : t \in T\}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo si verifica que:

$$\Pr[X_{t_{n+1}} = E_i \left| X_{t_n} = E_j, X_{t_{n-1}} = E_k, \ldots, X_{t_1} = E_l\right] = \Pr[X_{t_{n+1}} = E_i \,|X_{t_n} = E_j] \qquad (7.1)$$

$\forall n \in I\!N$, y para toda secuencia $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$,
o equivalentemente

$$\Pr[X_t = E_j \,|X_\tau \ \tau_1 < \tau < \tau_2 < t] = \Pr[X_t = E_j \,|X_{\tau_2}] \ \ \forall \tau_1 < \tau_2 < t \qquad (7.2)$$

La ecuación (7.1) (o la ecuación (7.2)) corresponde a la ya referida condición de Markov. La interpretación de esta condición es exactamente la misma que se dio para el caso discreto, es decir, la evolución futura del sistema depende del pasado única y exclusivamente a través de su estado actual o bien del último estado conocido.

Nuestra atención se centrará en el estudio de procesos estocásticos en tiempo continuo que satisfacen la condición de Markov. Además, se supondrá que el proceso es **homogéneo** en el tiempo, es decir la probabilidad que el sistema pase desde un determinado estado a otro en un intervalo de tiempo dado depende sólo de la magnitud de ese intervalo:

$$\Pr[X_{t_1} = E_j \,|X_{t_2} = E_i] = \Pr[X_{t_1+s} = E_j \,|X_{t_2+s} = E_i] \qquad \text{con}(t_1 > t_2) \text{ y } (s > 0).$$

7.2 Tiempo de Permanencia en un Estado

Aceptar la condición de Markov impone una fuerte restricción sobre la forma que puede tomar la ley de distribución del tiempo de permanencia del sistema en un estado dado. Para verificar esto, supongamos que el sistema ha permanecido en el estado E_j durante t unidades de tiempo, y nos preguntamos por la probabilidad que permanezca en él durante otras s unidades de tiempo, $\Pr[X_\tau = E_j \quad t < \tau \leq t+s \,|X_\tau = E_j \; 0 < \tau \leq t]$. De la condición (7.2) es posible ver que esa probabilidad es igual a $\Pr[X_\tau = E_j \quad t < \tau \leq t+s \,|X_t = E_j]$, vale decir la probabilidad que el sistema no salga de E_j durante las próximas s unidades de tiempo no depende de cuánto tiempo haya permanecido en ese estado. Lo anterior es equivalente a decir que la distribución del tiempo de permanencia del sistema en un estado dado debe presentar la propiedad de pérdida de memoria, y la única distribución continua con esas características es la exponencial.

Proposición 7.1 *Para una cadena de Markov en tiempo continuo homogénea, el tiempo de permanencia del sistema en un estado está exponencialmente distribuido.*

Demostración:
Análoga a la realizada en el Capítulo **??** 3, a partir de los supuestos de independencia y uniformidad, para probar que en procesos Poisson el tiempo entre eventos se distribuye exponencialmente.

7.3 Distribución de Probabilidades

Como se dijo al comienzo del capítulo lo que se desea determinar es la evolución en probabilidad del sistema a través del tiempo, esto es conocer la probabilidad que el sistema se encuentre en algún estado particular en un instante cualquiera del tiempo.

Para ello, definamos $m_{ij}(\tau, \tau+t)$ como la probabilidad que el sistema evolucione al estado E_j en el instante $\tau + t$ dado que está en el estado E_i en el instante τ. Ahora bien, como hemos restringido nuestro estudio a procesos homogéneos la probabilidad anterior es independiente de τ, por lo que podemos simplificar la notación a

$$m_{ij}(t) \equiv m_{ij}(\tau, \tau+t) = \Pr[X_{\tau+t} = E_j \,|X_\tau = E_i] \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$

Lo que se busca entonces es determinar $m_{ij}(t) \quad \forall t \geq 0$.

Al igual que en el caso discreto, se puede considerar que la evolución desde un estado inicial E_i a un estado final E_j en t unidades de tiempo se realiza pasando por algún estado intermedio E_k. En efecto, para cualquier $s < t$ el estado del sistema en s (X_s) es una variable aleatoria y en principio puede ser cualquiera de los estados posibles del sistema $(E_1, E_2, .., E_n)$. Por lo tanto, la probabilidad que el sistema evolucione de E_i a E_j en t unidades de tiempo puede escribirse usando probabilidades totales como:

$$\begin{aligned}
m_{ij}(t) &= \Pr[X_t = E_j \,|X_0 = E_i\,] \\
&= \sum_k \Pr[X_t = E_j \,|X_s = E_k\,] \cdot \Pr[X_s = E_k \,|X_0 = E_i\,] \\
m_{ij}(t) &= \sum_k m_{ik}(s) \cdot m_{kj}(t-s) \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

$$\text{donde} \quad m_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

La relación (7.3) se conoce como ecuación de *Chapman-Kolmogorov*. Definiendo $M(t) = [m_{ij}(t)]$, la condición de Chapman-Kolmogorov puede escribirse matricialmente como:

$$M(t) = M(s) \cdot M(t-s) \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \qquad (7.4)$$

(con $M(0) = I$ matriz identidad).

De (7.4) se tiene que:

$$M(t + \Delta t) - M(t) = (M(\Delta t) - I) \cdot M(t) = M(t) \cdot (M(\Delta t) - I) \qquad (7.5)$$

Dividiendo la ecuación anterior por Δt y tomando límite cuando $\Delta t \to 0$ se tiene que:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta t) - I}{\Delta t} \cdot M(t) = M(t) \cdot lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta t) - I}{\Delta t} \qquad (7.6)$$

Llamando $Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta t) - I}{\Delta t}$ se tiene

$$\frac{dM(t)}{dt} = Q \cdot M(t) = M(t) \cdot Q \qquad (7.7)$$

De esta forma, determinar la distribución de probabilidades para la evolución del sistema en el tiempo equivale a resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (7.7) con la condición de borde $M(0) = I$. La matriz Q se conoce como *generador infinitesimal* de $M(t)$, o bien como matriz de *tasas de transición*, y sus elementos $[q_{ij}]$ están definidos como:

$$\begin{aligned}
q_{ii} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \qquad (7.8) \\
q_{ij} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad i \neq j \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

Estos límites pueden interpretarse de la siguiente forma: si el sistema se encuentra en E_i entonces la probabilidad que después de Δt unidades de tiempo haya abandonado E_i es

$1 - m_{ii}(\Delta t)$ que es igual a $-q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$. [1] Es por ello que se dice que $-q_{ii}$ representa la tasa a la cual el sistema abandona el estado E_i. En forma análoga, para $i \neq j$, $m_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ es la probabilidad que el sistema, estando en E_i, evolucione a E_j antes de Δt unidades de tiempo, por lo que q_{ij} representa la tasa a la cual el sistema evoluciona de E_i a E_j. Además, como $\sum_j m_{ij}(\Delta t) = 1$ es fácil ver que $\sum_j q_{ij} = 0$ (que no es más que decir que la tasa a la cual el sistema abandona el estado E_i es igual a la suma de las tasas a las que evoluciona a todos los demás estados).

La solución de (7.7) es igual a

$$M(t) = e^{Q\cdot t} = I + Q\cdot t + Q^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + Q^3 \cdot \frac{t^3}{3!} + ...$$

Un punto aún no resuelto es como determinar explícitamente la matriz de tasas de cambio Q. Para ello, se necesita conocer un poco más del comportamiento evolutivo del sistema. De la proposición (7.1) sabemos que el tiempo de permanencia del sistema en un estado E_i cualquiera se distribuye en forma exponencial. Llamaremos ν_i al parámetro de dicha distribución. Cómo se comporta el sistema una vez que ha abandonado un estado, es una pregunta que debemos ser capaces de responder, es decir, cuando el sistema deja un estado, mediante qué mecanismo aleatorio escoge su próximo estado. Designemos por $p_{ij}(t)$ la probabilidad que el sistema evolucione al estado E_j si abandona el estado E_i en el instante t. Dado que hemos centrado nuestro interés en procesos homogéneos, esas probabilidades deben ser independientes de t y por tanto las denotaremos simplemente por p_{ij}, la probabilidad que el sistema pase al estado E_j cuando abandone el estado E_i.

Conocidos ν_i y p_{ij} $\forall i,j$ se tiene una descripción adecuada del sistema, y es posible calcular q_{ij} $\forall i,j$.

Comencemos por calcular $m_{ii}(\Delta t)$ para valores de Δt suficientemente pequeños. Si $i = j$ $m_{ii}(\Delta t)$ es igual a la probabilidad que el sistema no abandone el estado E_i en un periodo de duración Δt . Por lo tanto, $m_{ii}(\Delta t) = \Pr(\tau_i > \Delta t) = e^{\nu_i \cdot \Delta t}$. Desarrollando la función exponencial en serie de potencias se tiene entonces que $m_{ii}(\Delta t) = 1 - \nu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

En el caso que $i \neq j$, $m_{ij}(\Delta t)$ es equivalente a la probabilidad que el sistema abandone el estado E_i antes de Δt y luego escoja el estado E_j como destino. La probabilidad que deje E_i viene dado por $\nu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ y la probabilidad que escoja a E_j es p_{ij}. Como abandonar un estado y escoger el siguiente son eventos independientes se tiene entonces que $m_{ij}(\Delta t) = \nu_i \cdot \Delta t \cdot p_{ij} + o(\Delta t)$. En resumen

$$m_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 1 - \nu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t) & i = j \\ \nu_i \cdot p_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t) & i \neq j \end{cases}$$

Reemplazando estas últimas expresiones en las ecuaciones (7.8) y (7.9), y tomando los límites correspondientes, se tiene

[1] Con $o(t)$ una función que va a cero más rápido que t, i.e. $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

$$q_{ij} = \begin{cases} -\nu_i & i = j \\ \nu_i \cdot p_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

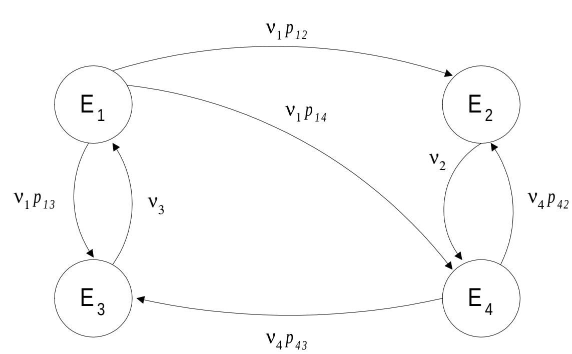
De esta forma, el sistema matricial $\frac{dM(t)}{dt} = Q \cdot M(t)$ se escribe en forma escalar como:

$$\frac{dm_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq i} [\nu_i \cdot p_{ik} \cdot m_{kj}(t)] - \nu_i \cdot m_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} [m_{ik}(t) \cdot \nu_j \cdot p_{jk}] - \nu_j \cdot m_{ij}(t) \qquad (7.10)$$

7.4 Representación mediante Grafo

Al igual que en el caso de cadenas de Markov en tiempo discreto, habitualmente representaremos la cadena de Markov mediante un grafo, en que los nodos corresponden a los estados. En este caso en los arcos ubicaremos ya no las probabilidades de transición, sino las tasas de transición entre los distintos estados (i.e. los elementos del generador infinitesimal). La figura 7.1 muestra un ejemplo de esta representación.

Figura 7.1: Ejemplo de grafo representante



Ejemplo

Retomemos el problema de determinar el estado de un equipo que falla en forma aleatoria expuesto al comienzo del capítulo. Consideremos el sistema que describe el estado del equipo compuesto por dos estados $\{0, 1\}$, en donde $X_t = 0$ significa que el equipo está funcionando en el instante t y $X_t = 1$ señala que el equipo está en reparaciones en el instante t. Supongamos conocidas las siguientes distribuciones:

- El tiempo de operación del equipo se distribuye en forma exponencial con tasa λ.
- El tiempo de reparación del equipo se distribuye exponencial con tasa μ.

De esta forma, el tiempo de permanencia del sistema en los estados $\{0,1\}$ se distribuye exponencialmente, de modo que es posible representar su evolución mediante una cadena de Markov en tiempo continuo.

Para este problema con dos estados es fácil ver que $p_{01}=1$ y $p_{10}=1$, con lo cual se tiene:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema $\frac{dM(t)}{dt}=Q\cdot M(t)$, se calculan los valores y vectores propios de Q. Los valores propios son $w^1=0$ y $w^2=-(\lambda+\mu)$ y los vectores propios asociados son:

$$v^1=\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^2=\begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$$

Con lo cual la solución es

$$\begin{bmatrix} m_{00}(t) & m_{01}(t) \\ m_{10}(t) & m_{11}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^1 \\ v_2^1 & v_2^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}e^{w^1\cdot t}+\begin{bmatrix} v_1^2 & v_1^2 \\ v_2^2 & v_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}e^{w^2\cdot t}$$

donde c_1,c_2,b_1,b_2 son constantes apropiadas, las que se determinan imponiendo la condición de borde $M(0)=I$. De esta forma la solución queda:

$$\begin{bmatrix} m_{00}(t) & m_{01}(t) \\ m_{10}(t) & m_{11}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}e^{0}+\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ -\mu & -\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}e^{-(\lambda+\mu)\cdot t}$$

La última expresión muestra la probabilidad que el sistema se encuentre en cualquiera de los dos estados dentro de t unidades de tiempo sabiendo cuál es el estado actual. Una observación interesante sale de tomar límite cuando $t\to\infty$ en la expresión anterior, de donde se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_{00}(\infty) & m_{01}(\infty) \\ m_{10}(\infty) & m_{11}(\infty) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

Se puede ver que, independiente del estado inicial, la probabilidad de encontrar el equipo operando en el largo plazo es $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ y la de encontrarlo en reparación es $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. En la próxima sección estudiaremos bajo qué condiciones una cadena de Markov presenta comportamientos límites como este.

7.5 Probabilidades Estacionarias

En esta sección nos preocuparemos de estudiar el comportamiento de largo plazo del sistema. En principio, este estudio se puede realizar estudiando el $\lim_{t\to\infty} M(t)$. Las características del límite anterior, al igual que en el caso discreto, están fuertemente ligadas a la estructura de la cadena en términos del número de clases recurrentes que tenga. Para evitar dificultades en este sentido, centraremos nuestro interés en un tipo especial de cadenas, que son las *irreducibles.*

Definición

Una cadena de Markov se dice irreducible si $\forall E_i, E_j$ *estados del sistema existe* $t > 0$ *tal que:*

$$m_{ij}(t) > 0$$

Una cadena es irreducible si está compuesta por una única clase. Si pensamos en el grafo representante de la cadena de Markov, una cadena de Markov en tiempo continuo es irreducible si para cualquier par de estados E_i y E_j existe un camino de E_i a E_j y otro de E_j a E_i. Un resultado importante para las cadenas irreducibles es el siguiente.

Proposición 7.2 *Si* $M(t) = [m_{ij}(t)]$ *es la matriz de transición de una cadena de Markov en tiempo continuo irreducible y homogénea entonces se tiene que:*

$$\lim_{t\to\infty} m_{ij}(t) = \pi_j$$

El resultado anterior señala que para cadenas irreducibles la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado E_j después de mucho tiempo de evolución partiendo de E_i es independiente de E_i. Si la cadena de Markov es finita este resultado garantiza la existencia de probabilidades estacionarias, dadas por $\{\pi_j\}$. Busquemos ahora un método para calcular esos valores límites. Para ello basta considerar de nuevo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dm_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k\neq j}[m_{ik}(t)\cdot \nu_k \cdot p_{kj}] - \nu_j \cdot m_{ij}(t) \tag{7.11}$$

y examinar la forma que adquiere al tomar el límite $t \to \infty$:

$$0 = \sum_{k\neq j}[\pi_k \cdot \nu_k \cdot p_{kj}] - \nu_j \cdot \pi_j \tag{7.12}$$

o bien,

$$\nu_j \cdot \pi_j = \sum_{k\neq j}[\nu_k \cdot p_{kj} \cdot \pi_k] \tag{7.13}$$

El sistema (7.13) señala que la tasa a la cual el sistema abandona el estado E_j en régimen estacionario, $\nu_j \cdot \pi_j$, es igual a la tasa a la cual el sistema evoluciona hacia el estado E_j desde los demás estados, $\sum_{k\neq j}[\nu_k \cdot p_{kj} \cdot \pi_k]$. Vale la pena notar que este sistema de ecuaciones se puede escribir matricialmente como $\Pi Q = 0$, donde $\Pi = [\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots]$.

El sistema de ecuaciones (7.13) junto con la condición $\sum_k \pi_k = 1$ permite determinar las probabilidades estacionarias del sistema. En una cadena infinita el sistema completo podría no tener solución, teniéndose $\lim_{t\to\infty} m_{ij}(t) = 0\,\forall j$.

Ejemplo

Considerando nuevamente el problema de las fallas de un equipo del ejemplo anterior, determinar qué fracción del tiempo, en promedio, el equipo está en reparaciones.

Al igual que en el caso discreto, las probabilidades estacionarias pueden interpretarse como el porcentaje del tiempo que el sistema se encuentra en cada estado. Para determinar entonces las probabilidades estacionarias se debe resolver el sistema (7.13), es decir:

$$\begin{array}{rl} \lambda \cdot \pi_0 = & \mu \cdot \pi_1 \\ \mu \cdot \pi_1 = & \lambda \cdot \pi_0 \end{array} \qquad \pi_0 + \pi_1 = 1$$

cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$$

Que corresponde, por supuesto, a los valores que habíamos obtenido tomando límite a la solución encontrada para las probabilidades de transición en función del tiempo.

7.6 Procesos de Nacimiento y Muerte

Un tipo especial de procesos susceptibles de ser modelados como cadenas de Markov en tiempo continuo son los procesos llamados de *Nacimiento y Muerte*.

Consideremos un sistema formado por un conjunto numerable de estados que denotaremos por $\{0, 1, 2, ...\}$. Si en cada instante sólo está permitido que el sistema:

- Mantenga su estado actual.
- Evolucione al estado siguiente, es decir, de n a $n+1$ (Nacimiento).
- Evolucione al estado anterior, es decir de n a $n-1$ $(n \geq 1)$ (Muerte).

entonces diremos que el sistema se comporta bajo un esquema de Nacimiento y Muerte.

Para que el proceso de nacimiento y muerte pueda ser modelado como una cadena de Markov en tiempo continuo se asumirá que, cuando el sistema está en el estado i, el tiempo hasta la próxima muerte (T_M) se distribuye exponencialmente con parámetro μ_i y que el tiempo hasta el próximo nacimiento (T_N) se distribuye exponencialmente con parámetro λ_i. De esta forma si el sistema se encuentra en un estado $i \geq 1$ el tiempo de permanencia en dicho estado es $T_i = min(T_M, T_N)$, es decir, se distribuye exponencialmente con parámetro $\lambda_i + \mu_i$. Ahora bien, si el sistema se encuentra en el estado 0 el tiempo de permanencia en dicho estado es igual al tiempo hasta el próximo nacimiento $T_0 = T_N$ que está exponencialmente distribuido con parámetro λ_0. Se tiene entonces que, para cualquier estado, el tiempo que el sistema permanece en él está exponencialmente distribuido y por tanto el sistema se comporta como una cadena de Markov en tiempo continuo.

Las probabilidades de transición a los estados vecinos corresponden a la probabilidad que una variable aleatoria exponencialmente distribuida sea menor que otra (un nacimiento ocurra antes que una muerte o al revés, según la transición considerada), probabilidades que ya hemos calculado al estudiar procesos Poisson, y que vienen dadas por:

$$i \geq 1 \begin{cases} p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} \\ p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \end{cases}$$

$$i = 0 \left\{ \; p_{0,1} = 1 \right.$$

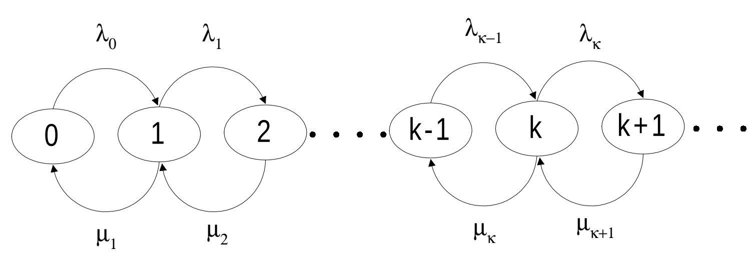
Luego como las tasas de cambio q_{ij} se calculan como $q_{ij} = p_{ij} \cdot \nu_i$ se tiene que:

$$i \geq 1 \begin{cases} q_{i,i+1} = p_{i,i+1} \cdot \nu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} \cdot (\lambda_i + \mu_i) = \lambda_i \\ q_{i,i-1} = p_{i,i-1} \cdot \nu_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \cdot (\lambda_i + \mu_i) = \mu_i \end{cases}$$

$$i = 0 \left\{ \; q_{0,1} = p_{0,1} \cdot \nu_0 = 1 \cdot \lambda_0 = \lambda_0 \right.$$

El grafo asociado a esta cadena de Markov toma la forma que se muestra en la Figura 7.6.

Figura 7.2: Grafo Representante de un Proceso de Nacimiento y Muerte



Ahora bien, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{dM}{dt} = Q \cdot M$ ya no es tan directo como en el ejemplo anterior por cuanto el sistema no es en este caso de dimensión finita. Sin embargo, es posible determinar las probabilidades estacionarias del sistema resolviendo en forma recursiva el sistema de ecuaciones $\Pi \cdot Q = 0$ (imponiendo además la condición $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$). Para el caso particular en que las tasas de nacimiento y muerte no dependen del estado del sistema ($\lambda_i = \lambda \, \forall i$ y $\mu_i = \mu \, \forall i$) dicho sistema de ecuaciones toma la forma:

$$\begin{cases} \pi_i \cdot (\lambda + \mu) = \pi_{i-1} \cdot \lambda + \pi_{i+1} \cdot \mu & i \geq 1 \\ \pi_0 \cdot \lambda = \pi_1 \cdot \mu \end{cases} \tag{7.14}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

Para resolver este sistema postulamos una solución del tipo $\pi_i = A \cdot \rho^i$ (el lector puede tomar transformada z a la ecuación (7.14) para verificar que ésa es la forma de la solución) la cual reemplazada en la ecuación (7.14) la transforma en:

$$\begin{aligned} A \cdot \rho^i \cdot (\lambda + \mu) &= A \cdot \rho^{i-1} \cdot \lambda + A \cdot \rho^{i+1} \cdot \mu \\ \rho \cdot (\lambda + \mu) &= \lambda + \rho^2 \cdot \mu \end{aligned} \tag{7.15}$$

La ecuación de segundo grado anterior admite como solución $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu}$ y $\rho_2 = 1$. Es fácil ver que $\rho_2 = 1$ no puede ser solución del sistema pues de serlo implicaría que $\pi_i = A$ constante que es incompatible con $\sum_i \pi_i = 1$. Ahora bien, para $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu}$ se tiene que $A = \pi_0$ y la solución toma la forma

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 \qquad \forall i \geq 0 \tag{7.16}$$

Además la condición $\sum_i \pi_i = 1$ permite calcular π_0 resolviendo:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 \tag{7.17}$$

La ecuación (7.17) admite solución para π_0 si y sólo si se cumple que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ en cuyo caso se tiene que $\pi_0 = 1 - \rho$ y

$$\pi_i = \rho^i \cdot (1 - \rho) \tag{7.18}$$

Vemos del desarrollo anterior que sólo existen probabilidades estacionarias para el sistema si se cumple que $\rho < 1$ o equivalentemente $\lambda < \mu$. Esta condición puede interpretarse de la siguiente manera: si λ fuese mayor o igual a μ entonces se tendría que la tasa de nacimientos es mayor que la tasa de muertes y por tanto para una evolución de largo plazo el sistema tiende a crecer indefinidamente (sobrepoblación) con lo cual $\pi_i = 0 \; \forall i$ (la ley de probabilidades sobre el número de personas en el sistema no converge, sino que a medida que el tiempo transcurre la masa de probabilidad se concentra en estados cada vez más poblados, i.e. se desplaza progresivamente hacia la derecha).

Queda propuesto al lector mostrar que para el caso en que las tasas de nacimiento y muerte dependen el estado del sistema las probabilidades estacionarias vienen dadas por

$$\pi_i = \pi_0 \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \rho_j$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \rho_j}$$

donde $\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}$, siempre que la serie en el denominador del lado derecho de la última igualdad sea convergente.

7.7 Ejercicios

1. Al interior de una línea de producción la operación de uno de sus equipos se ha convertido en el cuello de botella debido a las reiteradas fallas que tiene. El equipo funciona correctamente un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con parámetro λ. Las fallas del equipo pueden ser de dos tipos, una falla menor cuyo tiempo de reparación está exponencialmente distribuido con tasa μ_1, o una falla mayor cuyo tiempo de reparación es exponencial con tasa μ_2 ($\mu_2 < \mu_1$). Se ha observado que si el equipo falla con probabilidad p esta falla es menor.

   En base a la información anterior determine:

   (a) La fracción promedio del tiempo que el equipo esta en reparación.

   (b) Suponga que se adquiere otro equipo con las mismas características que el anterior. De esta forma si uno de los equipos fallas y el otro está operativo entonces la producción no se detiene. Determine que fracción del tiempo la producción está detenida si se dispone de un sólo mecánico.

   (c) Como cambia su respuesta anterior si se dispone dos mecánicos.

2. En cierto pueblo viven actualmente kN habitantes. Este pueblo cuenta con un sólo hospital con capacidad para N pacientes. Cada habitante mantiene una vida sana un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa λ_A. Cuando una persona enferma, no concurre inmediatamente al hospital sino que permanece en observación en su casa un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa λ_B. Pasado este periodo de observación, el paciente puede ser dado de alta o bien mantener su estado enfermo en cuyo caso es llevado al hospital. Con probabilidad p un paciente en observación va al hospital. El periodo de hospitalización de un paciente es una v.a. exponencialmente distribuida con tasa λ_C, después de dicho periodo el paciente es dado de alta. Si el hospital está lleno los pacientes que requieren hospitalización son desviados a una zona medianamente acondicionada en espera que un lugar se desocupe, suponga que la recuperación de estos pacientes sigue siendo exponencial con tasa λ_C.

   En base a la información anterior determine el número esperado de pacientes que están siendo atendidos en la zona de espera en un momento dado.

   (*IND*: Represente el estado de salud de un habitante como una cadena de Markov en tiempo continuo con tres estados.)

3. Don José maneja el único taxi colectivo que parte desde el paradero A. Al paradero llegan grupos de clientes de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro λ $[\frac{grupos}{hr}]$. Los grupos pueden ser de uno o dos clientes, con probabilidades conocidas q_1 y q_2 respectivamente ($q_1 + q_2 = 1$). El taxi de don José tiene capacidad para 4 pasajeros. Él permanece estacionado en el paradero leyendo el diario o conversando con los pasajeros hasta que haya al menos 3 pasajeros en el taxi; una vez que esto ocurre comienza su recorrido, el cual toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\mu}[hr]$. Cuando llega de vuelta al paradero el taxi siempre viene vacío. Además, los clientes que llegan al paradero cuando Don José no está se van, y optan por algún otro medio de transporte.

   Don José ha visto afectado su sistema nervioso producto del mucho conducir en esta ciudad y su neurólogo desea saber qué parte de su tiempo dedica él a conducir, a leer el diario y a conversar con los clientes.

   (a) Muestre que el quehacer de Don José se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo continuo y dibuje el grafo que la representa. ¿Qué estados definiría? Calcule las probabilidades estacionarias, y responda a las preguntas del médico.

   (b) Repita los cálculos anteriores, pero suponga ahora que el tiempo que le toma a don José hacer un recorrido sigue una distribución Erlang de parámetros n y μ, donde n es el número de pasajeros que parten en el taxi. Recuerde que la suma de variables aleatorias i.i.d. exponencialmente distribuidas sigue una distribución Erlang (si no lo recuerda, tal vez quiera refrescar sus conocimientos en la sección **??** 3.2.4).