Modelos de Decisión en Ambientes Inciertos

(Apunte de Clases para el Curso Investigación Operativa IN44A)

Departamento de Ingeniería Industrial - Universidad de Chile

René A. Caldentey Susana V. Mondschein [1]

Enero, 1999

[1]La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 4

Cadenas de Markov

4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos una familia particular de procesos estocásticos en tiempo discreto (más específicamente en tiempo entero) definidos en conjuntos finitos. Vale decir, procesos estocásticos de la forma $\{X_n \,/ n \in I\!N\}$ donde $\forall\, n\ X_n$ es una variable aleatoria en algún conjunto finito E.

El estudio de esta familia de procesos tiene su origen en una publicación de 1907 de A.A. Markov. El esquema de Markov es a la vez suficientemente general para permitir representar numerosas situaciones y suficientemente simple para permitir estudiarlas en detalle.

4.1.1 Notación

Un sistema S evoluciona en el tiempo de manera aleatoria. El estado del sistema se observa en un conjunto de instantes que asumiremos igual a $I\!N$. El estado del sistema en el instante n, X_n, es una variable aleatoria que toma valores en un conjunto de estados $E = \{E_1, \ldots, E_r\}$.

Denotaremos por $\pi_i(n)$ la probabilidad a priori de alcanzar el estado E_i en el instante n, i.e. $\Pr[X_n = E_i] = \pi_i(n)$. Así, los valores $\pi_i(n)_{i=1,..,r}$ constituyen la ley de probabilidades asociada a X_n, y las consideraremos como las componentes de un vector:

$$\pi(n) = [\pi_1(n)\, \pi_2(n)\ \ldots\ \pi_r(n)]$$

4.1.2 Representación por Desarrollo Temporal

Una manera de describir en probabilidad un proceso como el que aquí nos interesa es a través de un *Sistema de Leyes Condicionales Fundamentales*, vale decir conocer:

- Ley Inicial del Sistema: Corresponde a la ley de probabilidades de X_0 y está definida por el vector $\pi(0)$:

$$\pi(0) = [\pi_1(0) \ \dots \ \pi_r(0)]$$

- Ley Condicional de X_n: Se describe en forma recursiva la ley de probabilidades de X_n dado los estados alcanzados por el sistema en todos los instantes previos, i.e. se debe conocer

$$\Pr\left[X_n = E_{i_n} \middle| X_0 = E_{i_0}; X_1 = E_{i_1}; ...; X_{n-1} = E_{i_{n-1}}\right] \quad \forall (i_0, ..., i_n) \in \{1, 2, .., r\}^{n+1}$$

4.2 Cadenas de Markov

La descripción recién realizada vale para cualquier proceso estocástico en tiempo discreto que toma valores en un conjunto de estados finito. El cálculo del sistema de leyes condicionales fundamentales para un caso tan general suele tornarse extremadamente engorroso y complejo. A continuación describiremos un caso particular, conocido como *Cadenas de Markov*, cuyo tratamiento es más sencillo.

4.2.1 Condición de Markov

Comenzaremos introduciendo un supuesto simplificatorio denominado *Condición de Markov*: la ley condicional de X_{n+1} conocidos $X_0 = E_{i_0}, \dots, X_n = E_{i_n})$ depende solamente del último estado E_{i_n} alcanzado por el sistema. O bien

$$\Pr\left[X_{n+1} = E_i \left| X_0 = E_{i_0}, X_1 = E_{i_1}, \dots, X_n = E_{i_n}\right.\right] = \Pr\left[X_{n+1} = E_i \left| X_n = E_{i_n}\right.\right]$$

Es decir, si se conoce la historia del sistema hasta el instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su comportamiento futuro.

A un proceso $\{X_n \,/ n \in I\!N\}$ que satisface la condición de Markov se le denomina *Cadena de Markov.*

4.2.2 Representación Temporal

El sistema de leyes condicionales fundamentales del sistema se simplifica notablemente al incluir la condición de Markov. En esta situación se tiene:

- Ley Inicial: Vector de probabilidades $\pi(0)$.

- Leyes de Evolución del Sistema: En este caso basta definir la ley de probabilidades de X_n condicionada por X_{n-1}. Es decir, conocer la *Matriz de Probabilidades de Transición* P_n^{n-1} definida por

$$P_n^{n-1}[i,j] = \Pr[X_n = E_j \,|X_{n-1} = E_i] \quad \forall\, n \in I\!N, \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

De esta forma la evolución en probabilidad del sistema está completamente determinada si se conoce el conjunto de leyes condicionales fundamentales definido por:

$$\pi(0) \qquad \text{y} \qquad \left\{P_n^{n-1}\right\}_{n\in N} \tag{4.1}$$

4.2.3 Ley de Probabilidad para el Estado del Sistema

El sistema (4.1) define la evolución en probabilidad del proceso. A partir de él es posible determinar las leyes de probabilidad (a priori) para el estado del sistema en cualquier instante del tiempo.

Supongamos que conocemos la ley inicial $\pi(0) = [\pi_1(0) \;\ldots\; \pi_r(0)]$. Calculemos primero la ley de probabilidad para X_1. Hemos definido $\pi_i(1) = \Pr[X_1 = E_i]$. Esa probabilidad puede calcularse utilizando la ley condicional de X_1 por X_0 y aplicando probabilidades totales:

$$\pi_i(1) = \pi_1(0) \cdot P_1^0[1,i] + \ldots + \pi_r(0) \cdot P_1^0[r,i] = \sum_{k=1}^{r} \pi_k(0) \cdot P_1^0[k,i] \tag{4.2}$$

o bien, con notación matricial:

$$\pi(1) = \pi(0)\, P_1^0 \tag{4.3}$$

Un razonamiento idéntico al anterior permite escribir

$$\pi(n) = \pi(n-1)\, P_n^{n-1} \tag{4.4}$$

Usando inductivamente la Ecuación (4.4) se obtiene:

$$\pi(n) = \pi(0)\, P_1^0\, P_2^1 \ldots P_n^{n-1} \tag{4.5}$$

El resultado anterior señala que la ley de probabilidades a priori para el estado del sistema en un instante n depende exclusivamente de la ley de probabilidades iniciales del sistema $\pi(0)$ y del conjunto de matrices de transición $\{P_n^{n-1}\}_{n\in N}$ que conforman el sistema fundamental de leyes condicionales.

4.2.4 Condiciones de Chapman-Kolmogorov

Supongamos que nos interesa calcular la ley de probabilidades de X_{n+2}. A partir del resultado anterior sabemos que esto es posible si conocemos la ley de X_{n+1} y la matriz de probabilidades de transición entre el instante $n+1$ y el $n+2$ a través de la relación:

$$\pi(n+2) = \pi(n+1)\, P_{n+2}^{n+1}$$

Ahora bien, si en lugar de conocer la ley de probabilidades del instante $n+1$ se conoce la ley de probabilidades del instante n se tiene que:

$$\pi(n+2) = \pi(n)\, P_{n+1}^{n}\, P_{n+2}^{n+1}$$

De esta forma es posible definir una matriz de probabilidades de transición ya no de un período sino de dos períodos, P_{n+2}^{n} como:

$$P_{n+2}^{n} = P_{n+1}^{n}\, P_{n+2}^{n+1},$$

cuyos elementos $P_{n+2}^{n}[i,j]$ representan la probabilidad que el sistema evolucione al estado E_j en el instante $n+2$ si está en el estado E_i en el instante n.

En forma análoga se puede definir la matriz de evolución de k períodos P_{n+k}^{n} cuyo elemento $[i,j]$ corresponde a la probabilidad de evolucionar del estado E_i en el instante n al estado E_j en el instante $n+k$. Razonando inductivamente a partir de lo expuesto en el párrafo anterior es fácil ver que se cumple:

$$P_{m}^{n} = P_{q}^{n}\, P_{m}^{q} \qquad \forall n,q,m \quad n \leq q \leq m \tag{4.6}$$

en donde P_{n}^{n} es la matriz identidad. Esta relación se conoce como *Ecuación de Chapman-Kolmogorov* y es una consecuencia directa de la definición de probabilidades condicionales. En términos escalares la condición anterior se escribe como:

$$\Pr[X_m = E_j \,|X_n = E_i] = \sum_{k=1}^{r} \Pr[X_m = E_j \,|X_q = E_k] \cdot \Pr[X_q = E_k \,|X_n = E_i] \quad \forall i,j \tag{4.7}$$

4.3 Cadenas de Markov Homogéneas

En lo que sigue centraremos nuestra atención en los casos en que la probabilidad de evolucionar del estado E_i en el instante n al estado E_j en el instante $n+k$ es independiente de n. Esta condición es equivalente a imponer que la matrices de probabilidades de transición de un período P_{n+1}^{n} son constantes, independientes de n, es decir:

$$P_{n+1}^{n} = P \quad \forall n \tag{4.8}$$

La evolución del sistema queda ahora definida solamente por $\pi(0)$ ley inicial del sistema y por P matriz de probabilidades de transición de un período. Los elementos de la matriz P los notaremos como p_{ij} y corresponden a la probabilidad de evolucionar del estado E_i al E_j en un período cualquiera.

En este caso las leyes de probabilidades a priori del estado del sistema en el período n se determinan en función de las potencias de P según:

$$\pi(n) = \pi(0)\,(P)^n \quad \forall n \tag{4.9}$$

En lo que sigue nos concentraremos en el estudio del caso homogéneo y se utilizará la notación P^n para describir la potencia de orden n de la matriz P.

A partir de (4.9) el estudio de la evolución del sistema se limita al de las potencias sucesivas de P y el comportamiento de largo plazo del sistema queda definido por $\lim_{n\to\infty} P^n$. Estudiaremos este comportamiento más adelante.

4.3.1 Representación de una Cadena Homogénea mediante un Grafo

Para el caso de cadenas de Markov homogéneas es posible representar su comportamiento evolutivo (caracterizado por la matriz de probabilidades de transición P) mediante un grafo dirigido en donde los nodos representan los distintos estados posibles del sistema y los arcos entre nodos señalan la existencia de una probabilidad no nula de evolucionar en un período entre un par de estados.

Consideremos, por ejemplo, un proceso de Markov homogéneo con 6 estados: A, B, C, D, E y F. La ley de evolución del sistema viene dada por la matriz de probabilidades de transición de un período:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El grafo representante de dicha cadena de Markov es el que se presenta a continuación:

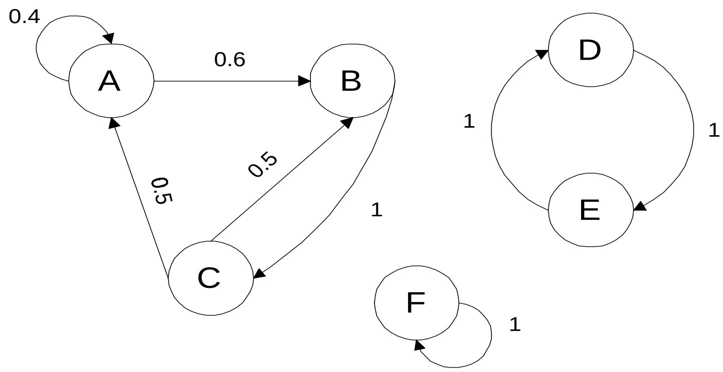
4.3.2 Clasificación de los Estados

A continuación estableceremos distinciones entre los estados de una cadena de Markov de acuerdo a algunas propiedades relevantes en términos de la evolución de ella. Para ello debemos introducir primero una relación en el conjunto de estados.

Sea $E = E_1, ..., E_r$ el conjunto de estados posibles de una cadena de Markov.

Definición 4.1 *(Accesibilidad) Un estado E_j es* accesible *desde un estado E_i si existe un entero $n \geq 0$ tal que la probabilidad de evolucionar de E_i a E_j en n períodos es no nula*

Figura 4.1: Ejemplo de Grafo Representante



$p_{ij}^n > 0$. *En este caso se denotará:*

$$E_i \to E_j$$

La relación de accesibilidad en E es refleja y transitiva. Para ver que es refleja basta tomar $n = 0$. Para demostrar la transitividad basta usar en forma adecuada la condición de Chapman-Kolmogorov. En el ejemplo de la sección anterior se tiene que $A \to C$, $C \to A$, $D \to E$, $B \not\to F$.

A partir de la relación de Accesibilidad construiremos la relación de Comunicación.

Definición 4.2 *(Comunicación) Los estados E_i y E_j están* comunicados *si E_j es accesible desde E_i y E_i es accesible desde E_j, en este caso se denotará:*

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

Para nuestro ejemplo se tiene que $B \leftrightarrow C$,$A \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow E$, $F \not\leftrightarrow A$.

La relación "estar comunicados" es una relación de equivalencia en E (verifíquelo). Por lo tanto, induce una partición del conjunto de estados E. Sea $E/_{\leftrightarrow} = C_1, C_2, \ldots, C_s$ el conjunto de clases de equivalencia (conjunto cuociente) definidas en E a través de la relación de comunicación. Vale decir $E_i, E_j \in C_k \Rightarrow E_i \leftrightarrow E_j$; y se cumple $\emptyset \neq C_i \subseteq E\, \forall i$; $i \neq j \Rightarrow C_i \bigcap C_j = \emptyset$; $\bigcup_i C_i = E$.

Definiremos ahora una relación en el conjunto cuociente de la relación de Comunicación.

Definición 4.3 *(Accesibilidad entre Clases) La clase C_j es accesible desde la clase C_i si existe un estado $E_k \in C_j$ que es accesible desde algún estado $E_m \in C_i$. Es decir*

$$[C_i \to C_j] \Longleftrightarrow (\exists\, E_k \in C_j\, \exists\, E_m \in C_i)\, [E_m \to E_k]$$

La relación de accesibilidad al interior de $E/_{\leftrightarrow}$ es refleja, antisimétrica y transitiva, y es por tanto una relación de orden en ese conjunto (i.e. una relación de orden entre clases).

Es claramente refleja pues todo estado es accesible desde sí mismo.

Es antisimétrica, en efecto si (i): $C_i \to C_j$ y (ii): $C_j \to C_i$ entonces por (i) todos los estados de C_j son accesibles desde C_i y por (ii) todos los estados de C_i son accesibles desde C_j por lo tanto los estados de C_i están comunicados a los estados de C_j, es decir, $C_j \equiv C_i$.

Es transitiva, en efecto si (a): $C_i \to C_j$ y (b): $C_j \to C_k$ luego por (a) existe $E_{i_1} \in C_i$ y $E_{j_1} \in C_j$ tal que $E_{i_1} \to E_{j_1}$, por otro lado de (b) se tiene que existe $E_{j_2} \in C_j$ y $E_{k_1} \in C_k$ tal que $E_{j_2} \to E_{k_1}$. Como E_{j_1} y E_{j_2} pertenecen a C_j entonces $E_{j_1} \leftrightarrow E_{j_2}$ y por tanto se tiene:

$$E_{i_1} \to E_{j_1} \leftrightarrow E_{j_2} \to E_{k_1},$$

como la relación $(\to)$ es transitiva se tiene que

$$E_{i_1} \to E_{k_1}$$

con lo cual el resultado queda probado.

Los elementos de C pueden clasificarse mediante la relación $(\to)$ en dos tipos: clases *Transientes o de Paso* y clases *Recurrentes o Finales*

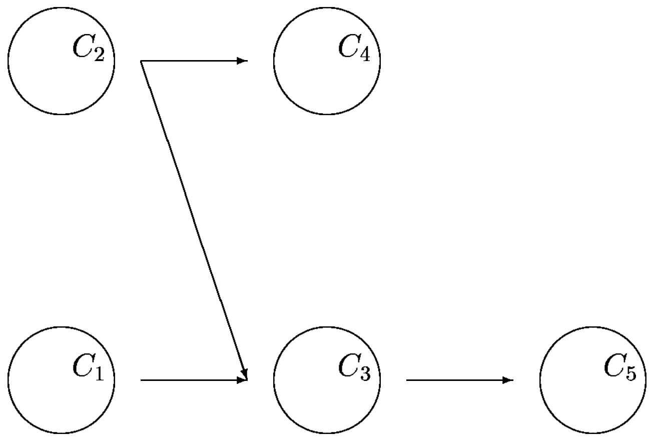
Definición 4.4 *(Clase Transiente) Una clase C_i se llama de Paso o Transiente si existe al menos una clase accesible desde C_i*

En otras palabras una clase C_i es Transiente si es posible salir de ella en términos de la evolución del sistema. Si una clase es transiente se dirá que los estados que la constituyen son *Estados Transientes.*

Definición 4.5 *(Clase Recurrente) Una clase es Recurrente o Final si no hay otra clase accesible desde ella.*

Una clase es Recurrente si una vez dentro de ella no es posible salir. En cadenas de Markov con número finito de estados siempre existe al menos una clase Recurrente. Si una clase es recurrente se dirá que los estados que la constituyen son *Estados Recurrentes*

La relación de accesibilidad entre clases permite representar el conjunto de clases de una cadena de Markov mediante un grafo dirigido sin ciclos (árbol), en donde los nodos representan las distintas clases y los arcos orientados establecen la condición de accesibilidad entre clases. Ello se ejemplifica en la siguiente figura:



En la figura se muestra una cadena con 5 clases, tres de ellas son transientes (C_1, C_2, C_3) y dos recurrentes (C_4, C_5). La clase C_5 es accesible desde todas las transientes, mientras que la clase C_4 es accesible sólo desde C_2 (además de sí misma).

Por último una clase Recurrente puede subclasificarse en términos de su *Periodicidad.*

Definición 4.6 *(Periodicidad) Una clase Recurrente se dice cíclica o periódica de período d si los estados que la conforman pueden agruparse en d subclases $S_1, S_2, ..., S_d$ tal que:*

$$X_n \in S_i \Rightarrow X_{n+1} \in S_{i+1}$$

con probabilidad 1.[1]

Si una clase Recurrente tiene una sola subclase S se dice que es aperiódica. Si una clase es periódica de período d los estados que la constituyen se dirán *Estados periódicos*, de período d.

4.3.3 Definición Alternativa para la Clasificación de Estados

Hemos definido los conceptos de estado transiente y estado recurrente a partir de una relación de orden entre clases. Una definición alternativa (y consecuente con la anterior) es hacerlo a partir de la probabilidad de retornar a un estado.

<u>Notación</u>

1. Sea $f_{ij}(n)$ la probabilidad que el sistema entre al estado E_j por primera vez en el período n si parte del estado E_i. Formalmente $f_{ij}(n) = \Pr[X_n = E_j \wedge X_k \neq E_j \forall k < n | X_0 = E_i]$.

[1] $S_{d+1} \equiv S_1$.

2. Sea f_{ij} la probabilidad que el sistema evolucione alguna vez al estado E_j si actualmente se encuentra en E_i, es decir,

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

Definición: E_i se dice un Estado Transiente si y sólo si $f_{ii} < 1$. Por su parte E_j se dice un Estado Recurrente si y sólo si $f_{jj} = 1$.

Distinguiermos ahora distintos tipos de estados recurrentes. Para ello llamemos μ_{ij} al tiempo esperado para la primera pasada por E_j partiendo en E_i, es decir $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}(n)$ (sólo para estados recurrentes de la misma clase). Un estado recurrente E_j se dice *recurrente positivo* si $\mu_{jj} < \infty$ y *recurrente nulo* si $\mu_{jj} = \infty$.

Se deja propuesto al lector el probar que si E_i y E_j son dos estados recurrentes de una misma clase entonces $f_{ij} = 1$, así como verificar que las definiciones dadas aquí son equivalentes a las presentadas en la Sección4.3.2 (estos resultados se pueden encontrar en la mayor parte de los textos de procesos estocásticos, como por ejemplo el de Ross).

4.3.4 Probabilidades de Evolución desde una Estado Transiente a una Clase Recurrente

Consideremos un sistema cuya evolución puede modelarse mediante una cadena de Markov finita y homogénea, la cual posee al menos una clase transiente. Supongamos que el sistema está inicialmente en un estado transiente, y nos preguntamos por la probabilidad que el sistema evolucione, alguna vez, a cierta clase recurrente. Si hay más de una clase recurrente accesible desde la clase transiente en que comenzamos, la respuesta puede no ser trivial. En esta sección nos preocuparemos de responder esa pregunta.

Supongamos que la cadena de Markov considerada admite s clases recurrentes las que denotaremos por $F_1, ..., F_s$. Sea además I_T el conjunto de índices asociado a los estados transientes de la cadena es decir $i \in I_T$ si $f_{ii} < 1$. Sea A_{ij} la probabilidad que el sistema evolucione del estado $i \in I_T$ a la clase F_j (la que queremos calcular) y a_{ij} la probabilidad que el sistema evolucione desde el estado $i \in I_T$ a F_j en una transición. Entonces la probabilidad de evolución desde E_i a F_j puede expresarse como:

$$A_{ij} = \sum_{k \in I_T} [p_{ik} \cdot A_{kj}] + a_{ij} \tag{4.10}$$

Definiendo las matrices $A = [A_{ij}]$, $a = [a_{ij}]$ y $P^{Tran} = [p_{ik}]$ con $i, k \in I_T$, $j = 1, 2, ..s$ la condición (4.10) puede reescribirse en forma matricial como:

$$A = P^{Tran} A + a \tag{4.11}$$

Vale la pena notar que la matriz P^{Tran} no es más que la matriz de probabilidades de transición entre los estados transientes (i.e. es el resultado de eliminar todas las filas y columnas asociadas a estados recurrentes de la matriz de probabilidades de transición). Ahora bien, es posible mostrar que la matriz $I - P^{Tran}$ es invertible (la demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.1). Utilizando eso en la Ecuación (4.11) se tiene

$$A = (I - P^{Tran})^{-1}\, a \tag{4.12}$$

La ecuación anterior permite determinar las probabilidades de evolución desde un estado transiente hacia una clase recurrente. Además al interior de una clase recurrente siempre es posible acceder cualquier estado desde cualquier otro y por tanto $\forall E_k \in F_j$ se cumple que $f_{ik} = A_{ij}\ \forall i \in I_T$.

4.4 Leyes Estables y Probabilidades Estacionarias

En esta sección nos ocuparemos del comportamiento de largo plazo del sistema. Es decir, si $\pi(n)$ representa la ley de probabilidades del sistema después de n períodos partiendo desde una ley inicial $\pi(0)$ interesa estudiar:

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) \tag{4.13}$$

4.4.1 Leyes Estables

Sea P la matriz de transición de un período asociada a una cadena de Markov finita homogénea. Hemos visto anteriormente que el comportamiento de $\pi(n)$ puede ser descrito a través de $\pi(n-1)$ y P mediante la relación:

$$\pi(n) = \pi(n-1)\, P \tag{4.14}$$

Si el límite (4.13) existe entonces se tiene que :

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) = [\lim_{n\to\infty} \pi(n-1)]\, P \tag{4.15}$$

Por lo tanto si $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi(n)$ se tiene de (4.15) que:

$$\pi = \pi\, P \tag{4.16}$$

Definición 4.7 *(Ley Estable) Una cadena de Markov finita homogénea con matriz de transición de un período P admite al vector π como* ley estable del sistema si π satisface (4.16) y es tal que $\pi \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$.

Proposición 4.1 *Toda cadena de Markov finita y homogénea admite al menos una ley estable.*

Dem: La demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.2.

Ahora bien, la existencia de leyes estables para una cadena de Markov no nos asegura la existencia de $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$, por ejemplo consideremos la siguiente cadena de Markov de dos estados representada por la matriz de transición P dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz P admite como ley estable $\pi = [0.5, 0.5]$. Sin embargo, no es difícil ver que el límite cuando $n \to \infty$ de $\pi(n)$ no necesariamente existe. En efecto, si inicialmente el sistema se encuentra en el primer estado, es decir, $\pi(0) = [1, 0]$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \pi(2n) &= [0\ 1] \\ \lim_{n\to\infty} \pi(2n-1) &= [1\ 0] \end{aligned}$$

Mediante este ejemplo hemos visto que el cálculo del $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$ no corresponde simplemente a la determinación de las leyes estables para el sistema, sin embargo, en caso de existir el límite anterior, éste corresponde a una ley estable.

4.4.2 Probabilidades Estacionarias

En esta sección nos preocuparemos de analizar en qué situación existe un comportamiento estacionario de largo plazo en la evolución de un sistema modelado como una cadena de Markov finita y homogénea. Entenderemos como comportamiento estacionario de largo plazo la existencia del $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$.

Definición 4.8 *(Probabilidades estacionarias) Un vector π es un vector de Probabilidades Estacionarias para una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P si independiente de $\pi(0)$ (condición inicial) se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \pi$$

De la definición anterior y de (4.16) es directo que todo vector de probabilidades estacionarias es una ley estable para el sistema.

Las probabilidades estacionarias representan el comportamiento de largo plazo del sistema, en el sentido que después de "mucho" tiempo de evolución la probabilidad de encontrar el sistema en algún estado particular E_j tiende a ser independiente del número de transiciones que se han producido y del estado inicial, y converge a un valor constante π_j. Otra interpretación para las probabilidades estacionarias es la fracción del tiempo que el sistema pasa en cada estado: π_j representa la fracción del tiempo que el sistema pasará en el estado E_j (si se lo deja evolucionar durante mucho tiempo).

Las afirmaciones anteriores suponen que el vector de probabilidades estacionarias es único; de no serlo estaríamos diciendo que para algún estado la fracción del tiempo que el sistema ocupa dicho estado durante su evolución permanente puede tomar dos valores distintos lo que no tiene sentido. El siguiente resultado aclara este punto.

Proposición 4.2 *Si una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P admite vector de probabilidades estacionarias π entonces este corresponde a la única solución del sistema :*

$$\pi = \pi P \qquad \pi \geq 0 \sum_j \pi_j = 1$$

Dem: La demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.3.

Como hemos visto no todas las cadenas de Markov admiten una ley de probabilidades estacionarias, el siguiente resultado entrega una primera caracterización de los casos en que estas existen.

Proposición 4.3 *Una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P admite un vector de probabilidades estacionarias π si y sólo si:*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$$

con Π matriz de probabilidades tal que su columna k-ésima es de la forma $\pi_j\,[1, 1, ..., 1]$.

Dem: la demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.4.

Consideremos una cadena de Markov con dos clases recurrentes, digamos F_1 y F_2. Si el sistema se encuentra inicialmente en F_1, por ser ésta una clase recurrente, durante la evolución del sistema éste nunca abandonará F_1 y por lo tanto de existir un vector de probabilidades estacionarias π se verifica que $\pi_i = 0\ \forall E_i \notin F_1$. El razonamiento es equivalente para F_2. De lo anterior, y recordando que de existir vector de probabilidades estacionarias éste debe ser único, se deduce que para cadenas de Markov con más de una clase recurrente no existe vector de probabilidades estacionarias. La Proposición 4.4 generaliza lo anterior:

Definición 4.9 *(Cadena Ergódica)*

1. *Un estado se dice* ergódico *ssi es recurrente positivo y aperiódico.*
2. *Una clase se dice* ergódica *ssi contiene (sólo) estados ergódicos.*

3. *Una cadena se dice* ergódica *ssi está constituida por una única clase, la cual es ergódica.*[2,3]

Proposición 4.4 *Una cadena de Markov admite vector de probabilidades estacionarias si y sólo si es ergódica (o ergódica + transiente).*

En este punto es bueno destacar la siguiente observación. Si un estado es transiente es posible salir de él y nunca regresar. Por lo tanto para un sistema evolucionando en forma permanente la probabilidad de encontrarlo en el largo plazo en un estado transiente es nula. De esta forma, en caso de existir vector de probabilidades estacionarias π, se debe cumplir que $\pi_i = 0$ para todo estado transiente E_i.

Para concluir esta sección determinaremos la relación que existe entre las probabilidades estacionarias y el tiempo esperado de retorno, μ_{ii}.

Sea E_i un estado recurrente en una cadena de Markov que admite vector de probabilidades estacionarias π. Sea $\pi_i \neq 0$ la probabilidad estacionaria asociada a E_i y sea x_{ii} la variable aleatoria que representa el tiempo de retorno a E_i. Supongamos que dejamos evolucionar el sistema desde su (única) clase recurrente. Sean $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ los instantes en los cuales el sistema alcanzó el estado E_i. Por ejemplo t_n es el período en el cual el sistema alcanzó por vez n-ésima el estado E_i. Como E_i admite probabilidad estacionaria, $\frac{n}{t_n}$ converge en probabilidad a π_i, es decir

$$\frac{t_n}{n} \xrightarrow{Prob} \frac{1}{\pi_i} \tag{4.17}$$

Por otro lado, $(t_2-t_1), (t_3-t_2), ..., (t_n-t_{n-1})$ son realizaciones independientes de x_{ii}, además como

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + ... + (t_n - t_{n-1}) \\ &= t_1 + x_{ii}^1 + x_{ii}^2 + ... + x_{ii}^{n-1} \\ \frac{t_n}{n} &= \frac{t_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{ii}^k}{n-1} \end{aligned} \tag{4.18}$$

como $\frac{t_1}{n}$ converge en probabilidad a 0 y de la ley de los grandes números la suma anterior converge al valor esperado de x_{ii}, es decir a μ_{ii} se tiene que

$$\frac{t_n}{n} \xrightarrow{Prob} \mu_{ii} \tag{4.19}$$

[2]Habitualmente admitiremos también la existencia de una o más clases transientes con un número finito de estados, caso en que hablaremos de "ergódica + transiente".

[3]Aquellos lectores que no están familiarizados con el término Ergódico encontrarán interesante la sección (4.5.3).

luego por (4.17) y (4.19) se tiene que

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

4.5 Extensiones

4.5.1 Cadenas de Markov en Sentido Inverso

Sea $\{X_n\}_{n=0,1,2,..}$ una cadena de Markov homogénea con matriz de transición de un período $P = [p_{ij}]$ y con ley de probabilidades inicial $\pi(0)$.
Suponiendo conocido el estado del sistema en el instante n ($X_n = E_{t_n}$) es posible describir en probabilidad el comportamiento pasado del sistema condicionado por su comportamiento en el período n, determinando la distribución de $X_{n-1}/X_n = E_{t_n}$, $X_{n-2}/X_n = E_{t_n}$, etc. Lo que se obtiene con este procedimiento es una nueva cadena de Markov (en sentido inverso) que en general no es homogénea.
Para ver esto recordemos que $\pi(k) = [\pi_1(k), \pi_2(k), .., \pi_r(k)]$ representa la distribución de probabilidad a priori del k-ésimo período, y definamos

$$e_{k,i}^{n,j} = Prob(X_k = E_i/X_n = E_j)$$

1. La Ley Condicional de X_k dado $X_{k+1} = E_j$ viene dada por $\{e_{k,i}^{k+1,j}\}_{i=1,2,..,r}$:

$$e_{k,i}^{k+1,j} = \frac{\pi_i(k) \cdot p_{ij}}{\pi_j(k+1)}$$

2. La Ley Condicional de X_{k+1} dado $X_{k+2} = E_j$ viene dada por $\{e_{k+1,i}^{k+2,j}\}_{i=1,2,..,r}$:

$$e_{k+1,i}^{k+2,j} = \frac{\pi_i(k+1) \cdot p_{ij}}{\pi_j(k+2)}$$

3. Ley Condicional de X_k dado $X_{k+1} = E_j$ y $X_{k+2} = E_s$

$$Prob(X_k = E_i/X_{k+1} = E_j, X_{k+2} = E_s) = \frac{\pi_i(k) \cdot p_{ij} \cdot p_{js}}{\pi_j(k+1) \cdot p_{js}} = e_{k,i}^{k+1,j}$$

De 1 y 3 se tiene que la cadena en sentido inverso satisface la condición markoviana. De 1 y 2 se aprecia que no es en general homogénea.

4.5.2 Cadenas de Markov de Segundo Orden

Al definir las cadenas de Markov vimos que el principal supuesto que ellas tienen es la condición markoviana, que señala que el comportamiento futuro del sistema depende exclusivamente de su comportamiento presente y no de su pasado.

$$Prob(X_{k+1} = E_i / X_k = E_{j_k}, ..., X_0 = E_{j_0}) = Prob(X_{k+1} = E_i / X_k = E_{j_k})$$

Una extensión natural al modelo clásico de Markov es suponer que el comportamiento de X_{k+1} depende tanto de X_k como de X_{k-1} y no sólo de X_k, en este caso se dice que la cadena de Markov es de segundo orden. Si suponemos que la condición de homogeneidad se sigue manteniendo, es necesario conocer r^3 probabilidades del tipo

$$p_{ijk} = Prob(X_n = E_k / X_{n-1} = E_j, X_{n-2} = E_i)$$

para describir la evolución en probabilidad del sistema.
Una forma alternativa de modelación es definir un nuevo sistema para el cual el estado del sistema al instante n es un par ordenado de estados del sistema original en los instantes n y $n-1$. De esta forma si el sistema inicial evolucionó como $E_i, E_j, E_i, E_s, E_r, E_r....$, el nuevo sistema presentaría una evolución del tipo $(E_i, E_j), (E_j, E_i), (E_i, E_s), (E_s, E_r), ...$ Este nuevo sistema se comporta como una cadena de Markov homogénea de orden uno, pero contiene r^2 estados. Su matriz de probabilidades de transición de un período $W = [w_{(i,j),(s,k)}]$ satisface:

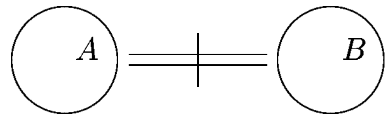
$$w_{(i,j),(s,k)} = \begin{cases} 0 & j \neq s \\ p_{ijk} & j = s \end{cases}$$

donde $w_{(i,j),(s,k)}$ es la probabilidad que el sistema evolucione del estado (E_i, E_j) al estado (E_s, E_k) en un período.

Resulta natural la extensión a cadenas de orden superior, en que la ley de probabilidades para X_n depende de los últimos k estados alcanzados, X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_{n-k}. En ese caso se definirá $|E|^k$ nuevos estados correspondientes a una k-tupla con los últimos k estados elementales alcanzados.

4.5.3 Ergodicidad

Supongamos que disponemos de dos estanques$A$ y B unidos por una cañería, la que contiene un llave de paso originalmente cerrada.



El estanque A contiene oxígeno a una presión p_a y el B helio a una presión p_b. Si la válvula se abre las moléculas de oxígeno evolucionan hacia el estanque B, mientras que las de *helio* lo hacen hacia el estanque A. Un esquema aleatorio puede perfectamente representar la evolución de las presiones parciales de las mezclas en cada estanque. Se constata que rápidamente un equilibrio se alcanza, las presiones en los estanques A y B se igualan y mantiene este comportamiento aunque se mantengan los intercambios moleculares entre ambos estanques.

Un estado permanente se ha alcanzado, en el cual el estado del sistema definido por las presiones parciales únicamente se mantiene constante. Más aún, el estado final del sistema es independiente de las condiciones iniciales del sistema, el resultado sería el mismo si las cantidades de oxígeno y helio hubiesen sido repartidas arbitrariamente en los estanques A y B.

Comportamientos como el anterior son frecuentemente observados en sistemas físicos con un gran número de grados de libertad, esto llevó a físicos como L. Boltzmann a enunciar el "*Principio de Ergodicidad*". En su forma más general, este principio señalaba que para un sistema complejo evolucionando en forma aleatoria su repetición en el tiempo tendía a regularizar su comportamiento pese a los caprichos del azar que interviene a cada instante.

Los matemáticos retomaron el término *ergódico* para designar propiedades precisas del comportamiento de modelos abstractos. Algunos autores definieron "sistema ergódico" como un sistema en evolución markoviana, homogéneo en el tiempo con una única clase recurrente aperiódica. La definición más común que se adoptó, dada por Maxwell fue aquella que expresaba que "ergodicidad" correspondía a igualar medias temporales con medias estadísticas, o también la convergencia de las medias temporales cuando el tiempo de evolución tiende a infinito.

Para entender de que representa está definición, consideremos un sistema compuesto por r estados $\{E_1, .., E_r\}$ evolucionando en forma aleatoria. Designemos por X_t el estado alcanzado por el sistema en el instante t. Consideremos dos tipos de frecuencias observadas.

1. *Media Estadística*: $Z_i^n(t)$
   Para ello se observan n realizaciones independientes del proceso y se denota por $Z_i^n(t)$ el número de veces que el sistema alcanzó el estado E_i en el instante t. $Z_i^n(t)$ representa la frecuencia absoluta de un evento en una muestra de tamaño n. Si $p_i(t) = Prob(X_t = E_i)$, la ley de los grandes números nos señala que si n tiende a infinito, $Z_i^n(t)/n$ converge en probabilidad a $p_i(t)$.

2. *Media Temporal*: S_i^T
Se observa ahora una sola realización del proceso entre los instantes 0 y T. Denotamos por S_i^T el tiempo durante el cual el sistema ocupó el estado E_i. La razón S_i^T/T es una media temporal.

4.6 Ejercicios

1. Considere un sistema de Markov homogéneo con cuatro estados A, B, C, D. La matriz de probabilidades de transición de un período viene dada por:

	(A)	(B)	(C)	(D)
(A)	0	0	0.75	0.25
(B)	0	0	0.5	0.5
(C)	1	0	0	0
(D)	0	1	0	0

   (a) Cuáles son las leyes estables del sistema?
   (b) Si el sistema se encuentra originalmente en C, cuál es la ley límite de los estados X_{2n} y X_{2n+1} cuando n tiende a infinito.
   (c) Responda el punto anterior si la ley inicial es $\pi(0) = [0.4, 0.2, 0.2, 0.2]$.
   (d) Se extraen de la evolución aleatoria del sistema anterior los estados obtenidos de dos en dos, es decir, $X_t, X_{t+2}, .., X_{t+2n}$. Es esta sucesión de Markov,cuáles son sus leyes estables.

2. Considere una cadena de Markov finita y homogénea. En qué caso la cadena definida en sentido inverso a partir del período n es homogénea.

3. Muestre que si E_i y E_j son estados de una misma clase recurrente entonces $f_{ij} = 1$.

4. Considere una cadena de Markov finita y homogénea representada por la siguiente matriz de transición de un período.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0
B	p	0	q	0	0	0	r	0	$1-p-q-r$
C	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
D	0	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0
E	0	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0
F	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1

   (a) Construya el grafo asociado a la cadena y clasifique todos sus estados identificando las distintas clases existentes y su periodicidad.

(b) Muestre que $f_{AC}(n) = \frac{1}{2} f_{AC}(n-1) + \frac{p}{2} f_{AC}(n-2)\, \forall n \geq 3$ y concluya que

$$f_{AC} = \frac{q}{1-p}$$

Deduzca el valor de f_{AG} y f_{AI}.

(c) Si el sistema evoluciona durante un número suficientemente grande de períodos partiendo en A. Cuál es la probabilidad de encontrarlo en H?

(d) Suponga que luego de evolucionar por un tiempo el sistema se encuentra actualmente en C. ¿Cuál es la probabilidad de encontrarlo n períodos más tarde en E?

Bibliografía

[1] Ross, S.M. *Stochastic Processes.* 2da edición, Wiley, 1996.

[2] Markov, A.A. Extension of the Limit Theorems of Probability Theory to a Sum of Variables Connected in a Chain. *The Notes of the Imperial Academy of Sciences of St. Petersburg*, VIII Series, Physio-Mathematical College, Vol. XXII, No 9, 1907.

Apéndice

4-A Demostración propiedades cadenas de Markov

4-A.1 Invertibilidad de la Matriz de Probabilidades de Transición entre los Estados Transientes

Proposición 4.5 *Sea P^{Tran} la matriz de probabilidades de transición entre los estados transientes de una cadena de Markov finita y homogénea (i.e. es el resultado de eliminar todas las filas y columnas asociadas a estados recurrentes de la matriz de probabilidades de transición). Entonces la matriz $(I - P^{Tran})$ es invertible.*

Dem: Supongamos que $I - P^{Tran}$ no admite inversa; entonces el sistema $(I - P^{Tran})Z = 0$ admite solución no trivial Z. Supongamos que Z tiene todas sus componentes iguales. En tal caso la ecuación $(I - P^{Tran})Z = 0$ obliga a que todas las filas de P^{Tran} sumen 1. Pero esto no es posible, puesto que desde algunos de los estados transientes se debe poder acceder a estados recurrentes, y las filas asociadas a esos estados en P^{Tran} no podrán sumar uno. De esa forma, los elementos de Z no pueden ser todos iguales.

Sea Z_m la componente de mayor valor absoluto de Z, y supondremos $Z_m > 0$ (el caso $Z_m < 0$ es análogo). Sea $I_M = \{i \mid Z_i = Z_m\}$ (puede haber más de una componente que alcance ese valor máximo). La ecuación $(I - P^{Tran})Z = 0$ equivale a $Z = P^{Tran}Z$ lo cual en particular obliga a que

$$Z_k = \sum_j P_{kj}^{Tran} \cdot Z_j \quad \forall k \in I_M \tag{4.20}$$

Sabemos que para $k \in I_M$ se tiene que $0 \leq P_{kj}^{Tran} \leq 1 \, \forall j$ y que $\sum_j P_{kj}^{Tran} \leq 1$. Además $Z_j = Z_k$ si $j \in I_M$ y $Z_j < Z_k$ si $j \notin I_M$. Así, la única de manera de cumplir la Ecuación (4.20) es

$$\sum_{j \in I_M} P_{kj}^{Tran} = 1 \quad \forall k \in I_M.$$

Vale decir desde cualquier estado E_k con $k \in I_M$ sólo se puede acceder a otros estados cuyos índices también estén en I_M. Ello implica que esos estados constituyen una (o más) clases recurrentes, lo cual es una contradicción (son estados transientes).

De esa forma no puede haber solución Z no trivial para $(I - P^{Tran})Z = 0$, de donde $(I - P^{Tran})$ es invertible. ∎

4-A.2 Demostración de la Proposición 4.1

Toda cadena de Markov finita y homogénea admite al menos un vector π como ley estable.

Para verificar la validez del enunciado anterior basta observar primero que según la (4.16) π debe satisfacer:

$$\pi\,(P - I) = 0 \tag{4.21}$$

con I matriz identidad. Como P es una matriz de probablidad entonces se cumple que $\det(P - I)$=0 pues la suma de los términos de cada fila es nulo. Por lo tanto, el sistema (4.21) admite solución no trivial [4]. Por lo tanto siempre existe $\pi \neq 0$ tal que $\pi = \pi\, P$.

Lo siguiente es demostrar que entre las soluciones que existen alguna satisface con $\pi \geq 0$. Para ello, verificaremos primero que si π es solución de (4.21) entonces todos sus elementos tienen el mismo signo. En efecto, sea π alguna solución y supongamos que sus elementos tienen distintos signos. Sea I_1 el conjunto de indices tal que $\pi_i < 0$ $i \in I_1$ e I_2 el complemento de I_1; el resultado es directo si alguno de estos conjuntos de indices es vacío. Entonces de (4.16) se tiene que:

$$\pi_k = \sum_{j \in I_1} [\pi_j \cdot p_{jk}] + \sum_{i \in I_2} [\pi_i \cdot p_{ik}] \quad k \in I_1 \tag{4.22}$$

Luego sumando la ecuación anterior sobre $k \in I_1$ y reordenando se tiene:

$$\sum_{k \in I_1} [\pi_k (1 - \sum_{j \in I_1} p_{kj})] = \sum_{k \in I_1} [\sum_{i \in I_2} \pi_i \cdot p_{ik}] \tag{4.23}$$

por ser P una matriz de probabilidad, $1 - \sum_{j \in I_1} p_{kj} \geq 0$ y por tanto el lado de la izquierda de la ecuación anterior es negativo mientras que el lado derecho es positivo, esta contradicción se debe a suponer que tanto I_1 como I_2 son distintos de vacío, y por tanto se concluye que todas las componentes de π son de igual signo.

Ahora bien, es fácil ver que si π satisface (4.21) entonces $\lambda\,\pi$ también será solución ($\lambda \in I\!R$). Entonces escogiendo $\lambda = \sum_i \pi_i$ se tendrá que $\lambda \neq 0$ pues $\pi \neq 0$ y todas sus componentes son del mismo signo. De esta forma $\bar{\pi} = \frac{\pi}{\lambda}$ es solución de (4.21) con todas sus componentes no negativas y con suma igual a 1, es decir, $\bar{\pi}$ es una ley estable del sistema. ∎

4-A.3 Demostración de la Proposición 4.2

Si una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P admite vector de probabilidades estacionarias π entonces este corresponde a la única solución del sistema :

$$\pi = \pi\, P$$

<u>Demostración</u>

[4] También es posible concluir que P admite a 1 como valor propio.

Sabemos de la Sección 4.4.1que de existir vector de probabilidades estacionarias éste corresponde a una ley estable del sistema, de modo que sólo resta probar que, de existir, es único.

Para verificar la unicidad del vector de probabilidades estacionarias π consideremos la posibilidad que exista otra ley estable distinta π^* con $\pi^* \neq \pi$. Supongamos que el sistema comienza su evolución con un vector de probabilidades iniciales $\pi(0) = \pi^*$.Como π^* es una ley estable se verifica que $\pi^* = \pi^* P$ por lo tanto $\pi(1) = \pi(0)\, P = \pi^*\, P = \pi^*$, en general se tiene que $\pi(n) = \pi^*$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \pi^*$. Como π es un vector de probabilidades estacionarias independiente de la ley inicial $\pi(0)$ (en este caso $\pi(0) = \pi^*$) se cumple que $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \pi$, por lo tanto se tiene que $\pi = \pi^*$. ∎

4-A.4 Demostración de la Proposición 4.3

Una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período admite un vector de probabilidades estacionarias π si y sólo si:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$$

con Π matriz de probabiliades tal que su columna k-ésima es de la forma $\pi_j\,[1, 1, ..., 1]$.

Demostración

Si existe un vector π de probabilidades estacionarias entonces existe $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$ además como $\pi(n) = \pi(0)\, P^n$ se tiene que existe $\lim_{n\to\infty} P^n$. Sea la matriz Π este valor límite para P^n. Como π es independiente de $\pi(0)$ se tiene que el producto $\pi(0)\,\Pi$ tiene que ser constante para todo vector de probabilidades $\pi(0)$, es claro de esto que la única posibilidad es que las columnas de Π tienen que ser de la forma $\pi_j\,[1, 1, .., 1]$.

Supongamos ahora que $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$ matriz de probabilidades tal que cada una de sus columnas es de la forma $\pi_j\,[1, 1, .., 1]$. Por lo tanto, $\forall \pi(0)$ vector de probabilidades iniciales se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \pi(0)\, P^n \;=\; \pi(0)\Pi \;=\; \pi$$

Luego π es un vector de probabilidades estacionarias. ∎