Modelos de Decisión en Ambientes Inciertos

(Apunte de Clases para el Curso Investigación Operativa IN44A)

Departamento de Ingeniería Industrial - Universidad de Chile

René A. Caldentey Susana V. Mondschein [1]

Enero, 1999

[1]La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Parte II

Procesos Estocásticos

Capítulo 3

Proceso de Poisson

3.1 Introducción a los Procesos Estocásticos

Se designa bajo el nombre de *Modelo Estocástico* todo esquema abstracto de naturaleza probabilística, susceptible de representar algún fenómeno real. En la medida en que los modelos se adecuan a lo observado, permiten preveer las consecuencias de ciertas situaciones, entregando así la posibilidad de efectuar elecciones razonadas.

En una breve descripción de un modelo aleatorio, se reconocen los siguientes elementos:

1. Un conjunto de estados posibles del sistema **E**.
2. Un conjunto de eventos elementales posibles Ω.
3. Una distribución **D** de probabilidades sobre Ω.

Veamos a través de algunos ejemplos qué representa cada uno de los elementos anteriores:

- Ejemplo 1: *Ventas mensuales*
  Una empresa vende dos productos A y B. Las cifras de ventas mensuales observadas son:

  $$\begin{array}{c}\text{Producto } A : a_1 \;;\; a_2 \;;\; a_3 \;;\; .... \;;\; a_n;...\\ \text{Producto } B : b_1 \;;\; b_2 \;;\; b_3 \;;\; .... \;;\; b_n;...\end{array}$$

  El conjunto de estados fundamentales **E** en este caso corresponde a los posibles niveles de venta observados en un mes particular (a_n, b_n), los que toman valores enteros no negativos y por tanto se tiene $E = I\!N \times I\!N$.
  El conjunto de eventos elementales Ω para este modelo agrupa todas las posibles secuencias de ventas observables para los productos a lo largo del periodo de interés. Por lo tanto, si interesa estudiar los niveles de venta mensuales por un periodo de dos años

(24 meses) se tiene que $\Omega = (I\!N \times I\!N)^{24}$.
Por último, sobre la ley de distribución de probabilidades $\boldsymbol{D}$ es muy poco lo que se puede decir sin entrar en detalles más específicos del modelo, pero en términos generales se define sobre el conjunto Ω.

- Ejemplo 2: *Panes de un aparato eléctrico*
En un laboratorio se dispone de un aparato eléctrico, el cual cae en pane cada cierto tiempo. Se supone que las panes son todas del mismo tipo, es decir, que necesitan del mismo tiempo de reparación y significan el mismo costo para el laboratorio. La única incógnita es entonces la sucesión de instantes en los que las panes comienzan:

$$t_1 < t_2 < t_3 < .... < t_n < ...$$

Los estados posibles del aparato son en este caso dos: en operación (0), en pane (1), es decir, $E = \{0, 1\}$. El evento aleatorio elemental asociado es una sucesion de instantes en los que el equipo falla, es decir, una sucesión de "puntos" en el eje del tiempo. Es lo que se llama un proceso puntual (que definiremos más adelante).

3.1.1 Procesos Estocásticos

Los modelos aleatorios que se han presentado son funciones aleatorias pero con la particularidad muy importante que el argumento de estas funciones es el tiempo. Se dice entonces que son *Procesos Estocásticos o Aleatorios.* En este tipo de modelos se busca saber cómo el futuro de un sistema está ligado (correlacionado) con su pasado y presente.

Definición 3.1 *Se dice que* $\{X_t\}_{t \in T}$ *es un* Proceso Estocástico *en* E *si,* $\forall\, t\ \in T$, X_t *es una variable aleatoria con valores en* E.

Un proceso estocástico es, entonces, un conjunto de variables aleatorias. Habitualmente los valores $t \in T$ se interpretan como instantes de tiempo. El conjunto E corresponde al conjunto de estados posibles para algún sistema en estudio. De esa forma X_t puede interpretarse como el estado de un sistema en el instante t, estado que, visto desde un instante "anterior" a t, es una variable aleatoria.

El proceso estocástico (la colección completa de variables X_t) corresponde a la evolución (aleatoria) del sistema. Una realización de un proceso estocástico es un conjunto de valores en E: los valores **observados** para el estado del sistema en cada instante del tiempo. Vale decir una realización de un proceso estocástico puede ser vista como una función de T en E, que a cada $t \in T$ asocia el valor observado para el estado del sistema en t.

Para describir en probabilidad un proceso estocástico se debe ser capaz de construir la función de distribución conjunta para cualquier subconjunto de él, es decir conocer, $\forall m \in I\!N$,

$\forall x \in E^m$, $\forall t \in T^m$ t.q. $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$,

$$F_X(x,t) = \Pr\left[X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, \ldots, X_{t_m} \le x_m\right]$$

Mientras más general y descriptivo es el modelo usado al representar un proceso estocástico más problemas teóricos y prácticos aparecen en su modelamiento y posterior aplicación. Es por ello que se suelen estudiar algunas familias o tipos de procesos estocásticos que presenten alguna característica simplificatoria. La diversas simplificaciones que se pueden adoptar caen, en general, en alguno de los siguientes puntos:

- Naturaleza del conjunto T.
- Naturaleza del conjunto E.
- Tipos de funciones X_t posibles.
- Tipos de leyes de probabilidad de los eventos aleatorios.

Las simplificaciones o particularidades pueden corresponder a más de uno de los puntos anteriores y se expresan por relaciones axiomáticas sobre el proceso. En las secciones que siguen definiremos, a través de sucesivas simplificaciones, algunos procesos estocásticos que resultan de interés.

3.1.2 Procesos de Conteo

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in R_+}$ es un *Proceso de Conteo* si X_t representa el número de veces que ha ocurrido algún fenómeno aleatorio hasta el instante t.

Ejemplos:

- Número de votos en una urna a lo largo de un día de votación.
- Número de accidentes de tránsito acumulados a lo largo de un año.
- Llegadas de camiones a un punto de carga.
- Ventas de un cierto producto en un supermercado.

En otras palabras, es un proceso estocástico en que el conjunto de estados posibles corresponde a los enteros no negativos y que es creciente en el tiempo (si $t_1 \ge t_2$ entonces $X_{t_1} \ge X_{t_2}$ con probabilidad 1). Además, se suele incorporar como supuesto que en $t = 0$ no han ocurrido eventos ($X_0 = 0$ con probabilidad igual a 1).

En una realización de un proceso de conteo el valor observado de X_t es una constante (como función de t) hasta que ocurre un *evento* que lo hace cambiar de estado, y dichos eventos ocurren "sólo ocasionalmente".

3.1.3 Definición en Probabilidad de un Proceso de Conteo

Para especificar en probabilidad un proceso de conteo se pueden adoptar dos puntos de vista, los que se explican a continuación:

Primera Definición

Sea un conjunto de k intervalos disjuntos $(t_1, t'_1); (t_2, t'_2); ......, (t_k, t'_k)$ y $N_1, N_2, ..., N_k$ el número de realizaciones aleatorias del fenómeno en estudio que se produce en cada uno de esos intervalos. Para definir en probabilidad el Proceso de Conteo es necesario conocer $\forall k$ y en función de $(t_1, t'_1; ....; t_k, t'_k)$ la función de repartición del evento aleatorio $(N_1, ..., N_k)$.

Segunda Definición

Otra forma para definir en probabilidad un proceso de conteo es definir los intervalos sucesivos $U_1, U_2, ..., U_k$ que separan los eventos tomados en orden cronológico [1]. Como el número de intervalos puede ser arbitrariamente grande, en lugar de definir directamente una ley de probabilidades sobre este conjunto, se debe definir una sucesión infinita de leyes de probabilidad. El procedimiento más simple consiste en definir un sistema fundamental de leyes de probabilidad dado por:

- Ley de U_1.
- Ley condicional de U_2 dado $U_1 = u_1$.
  $\vdots$
- Ley condicional de U_k dado $U_1 = u_1$, $U_2 = u_2$,..., $U_{k-1} = u_{k-1}$.
- etc.

Sin embargo especificar toda esta información en un caso general podría resultar una enorme cantidad de trabajo. Introduciremos (en forma de axiomas) dos supuestos simplificatorios, que nos llevarán a definir el llamado *Proceso de Poisson.*

3.2 Proceso Poisson

Se designa bajo el nombre de Proceso Poissoniano una categoria más o menos amplia de procesos. Para evitar ambigüedad, es bueno señalar que en esta sección se describe el Proceso Uniforme de Poisson, también llamado Proceso Clásico de Poisson, que corresponde al modelo más simple y particular. En la Sección 3.3 se estudian algunas extensiones.

[1] Este procedimiento supone que los eventos son aislados, es decir, que la probabilidad que dos o más eventos simultáneos se produzcan es nula.

3.2.1 Definición de un Proceso Uniforme de Poisson

Como se menciona más arriba definiremos el Proceso de Poisson Uniforme a partir de 2 supuestos simplificatorios que introduciremos como axiomas.

Axioma de Independencia (Incrementos Independientes)

Si $N_1, ..., N_k$ representan el número de eventos que se producen en los intervalos disjuntos $(t_1, t_1'), \ldots, (t_k, t_k')$, entonces $N_1, \ldots, N_k$ son Mutuamente Independientes en Probabilidad y esto para cualquier k y $t_1 < t_1' < \ldots < t_k < t_k')$.

Se supone también por otra parte que la intensidad del fenómeno es independiente del tiempo, de donde la segunda condición.

Axioma de Uniformidad (Incrementos Estacionarios)

La ley del conjunto $(N_1, ..., N_k)$ queda invariante si los $2 \cdot k$ valores $(t_1, t_1'; .....; t_k, t_k')$ son aumentados (o disminuidos) en una misma cantidad.

Si los dos axiomas anteriores se cumplen, para definir el proceso basta conocer una sola familia de leyes dependiendo de un sólo argumento: La ley de $N(h)$, número de realizaciones que se producen sobre un intervalo $(t, t+h)$.

Introduciremos además un tercer axioma, para descartar situaciones que no revisten de interés: suponemos que la probabilidad que ningún evento se produzca sobre un intervalo finito no es ni nula ni igual a 1.

Axioma 3

Si $p_0(h)$ es la probabilidad que ningún evento se produzca en $(t, t+h)$, se tiene para $\forall h > 0$:

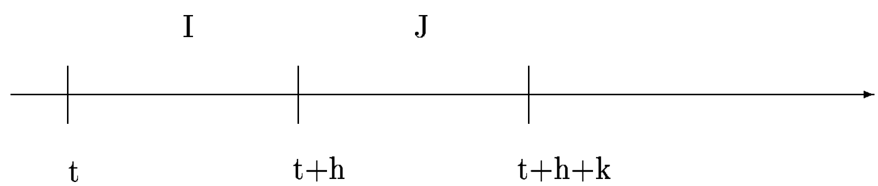
$$0 < p_0(h) < 1$$

Si $p_0(h)$ fuese igual a 1, nunca se produciría un evento. Si fuese nula el conjunto de eventos instantáneos sería denso y el evento se produciría continuamente. Estos son casos sin interés.

3.2.2 Ley del Intervalo Aleatorio que separa dos Eventos Consecutivos

Sea $p_0(t,h)$ la probabilidad que ningún evento se produzca entre t y $t{+}h$. Por el Axioma 1 está probabilidad es independiente de las realizaciones fuera de $(t, t{+}h)$ y depende exclusivamente de t y h. Mas aún, por el axioma 2 es independiente de t. Por lo tanto se tiene $p_0(t,h) = p_0(h)$.

Sean dos intervalos consecutivos I y J separados por los instantes t, $t+h$ y por $t+h$, $t+h+k$.



La probabilidad que ningún evento se produzca sobre I y J puede escribirse de dos maneras.

$$\text{Ningún evento en } I \cup J \Leftrightarrow [\text{Ningún evento en } I] \cap [\text{Ningún evento en } J]$$

Como el número de eventos en I y en J son v.a. independientes, las probabilidades asociadas a esos eventos satisfacen:

$$p_0(h+k) = p_0(h) \cdot p_0(k).$$

Luego para $h > 0$ se tiene:

$$\frac{p_0(k+h) - p_0(k)}{h} = p_0(k) \cdot (\frac{p_0(h) - 1}{h}) \tag{3.1}$$

con lo cual, tomando límite cuando h tiende a 0 y observando que $p_0(0) = 1$,

$$\frac{dp_0(k)}{dk} = p_0(k) \cdot \left.\frac{dp_0(k)}{dk}\right|_{k=0} \tag{3.2}$$

Llamando $\lambda = -\frac{dp_0(k)}{dk}|_{k=0}$ se tiene que la solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$p_0(k) = e^{-\lambda k} \qquad k \geq 0 \tag{3.3}$$

De este resultado fundamental se puede deducir fácilmente todo el estudio del Proceso Uniforme de Poisson. Lo primero es encontrar la función de repartición de los intervalos de tiempo que separan dos eventos consecutivos.[2]

Supongamos que en el instante t_i se ha producido un evento, y llamemos t_{i+1} al instante (aleatorio) en que se producirá el siguiente. Denotemos además por h al intervalo de tiempo que separa ambos eventos, $h = t_{i+1} - t_i$. La probabilidad que $h > k$ corresponde a la probabilidad que en un intervalo de duración k no se produzca ningún evento, es decir, $p_0(k)$. Luego, del resultado previo,

$$\Pr[h > k] \equiv p_0(k) = e^{-\lambda \cdot k} \tag{3.4}$$

Llamando $F(k)$ la función de distribución de h, se tiene de (3.4):

$$F(k) = 1 - \Pr[h > k] = 1 - e^{-\lambda \cdot k} \qquad \forall k \geq 0 \tag{3.5}$$

es decir, h tiene una distribución exponencial de parámetro λ.

A partir de este resultado se puede observar que la probabilidad que ocurran 2 o más eventos simultáneamente es nula (el intervalo de tiempo entre 2 eventos sería igual a cero).

3.2.3 Primera Definición en Ley de un Proceso Uniforme de Poisson

El Proceso Uniforme de Poisson es un proceso de conteo en el cual los intervalos separando dos eventos consecutivos son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas de acuerdo a una ley Exponencial.

$E(h) = \frac{1}{\lambda}$ es el periodo medio entre dos eventos consecutivos; su inverso λ representa la frecuencia media, o si se quiere la densidad media del proceso puntual en el eje del tiempo y sus unidades son (Número de ocurrencias/ Unidad de tiempo). A dicho parámetro se le denomina la *tasa* del proceso.

Algunos resultados importantes que es posible extraer de la definición de un Proceso Uniforme de Poisson son los siguientes:

[2]Recordar que al definir la funci
'on de repartici
'on de los intervalos se está definiendo completamente la ley de probabilidades asociada a un proceso de conteo como el poissoniano (ver definición de procesos de conteo).

3.2.4 Propiedades de un Proceso Uniforme de Poisson

Antes de detallar un conjunto de propiedades que satisface el proceso uniforme de Poisson conviene definir la siguiente notación para las distintas variables que intervienen:

Definiciones

- Sea $N(t)$ el número de eventos que se han producido en el intervalo $[0, t]$.
- Sea $N(t; t')$ el número de eventos producidos en el intervalo $(t, t']$.

$$N(t, t') = N(t') - N(t)$$

- Sea U_i el tiempo que transcurre entre los eventos consecutivos $i - 1$ e i.
- Sea S_n el tiempo que transcurre hasta que se produce el n-ésimo evento.

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$$

Propiedad 3.1 *El Proceso Uniforme de Poisson no tiene Memoria. Si U representa el tiempo entre dos eventos consecutivos, se cumple entonces que:*

$$\Pr[U > t + s | U > s] = \Pr[U > t]$$

Propiedad 3.2 *Incrementos Independientes*
Sea $A = N(t_1, t_2)$ y $B = N(t_3, t_4)$, donde $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ entonces en un proceso uniforme de Poisson se cumple que A y B son independientes.

Propiedad 3.3 *Incrementos Estacionarios*
$N(t, t')$ tiene la misma distribución que $N(t' - t)$.

Propiedad 3.4 *S_n tiene una distribución Erlang de parámetros n y λ, es decir, su función de densidad viene dada por:*

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{(n-1)!} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in N$$

Propiedad 3.5 *$N(t)$ tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda \cdot t$. Luego su función de repartición es:*

$$\Pr[N(t) = k] = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{k!} \quad \forall k \in N$$

Propiedad 3.6 *Sea (a, b) un intervalo de tiempo dado. Si se sabe que n eventos se produjeron en (a, b) y t_1 , t_2 ,......, t_n son los instantes en los que estos eventos ocurrieron ($a \leq t_1 < t_2 <$ .... $< t_n \leq b$), entonces los n eventos se reparten Uniformemente en el intervalo (a, b). Es decir, la función de distribución conjunta de los t_1 , t_2 ,......, t_n viene dada por:*

$$f(t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \qquad a \leq t_1 < t_2 < .... < t_n \leq b$$

Las propiedades de incrementos independientes e incrementos estacionarios no requieren demostración, pues las introdujimos como axiomas para definir el Proceso de Poisson. La demostración de las demás propiedades se encuentra en el Apéndice 3-A.

3.2.5 Segunda Definición de un Proceso Uniforme de Poisson

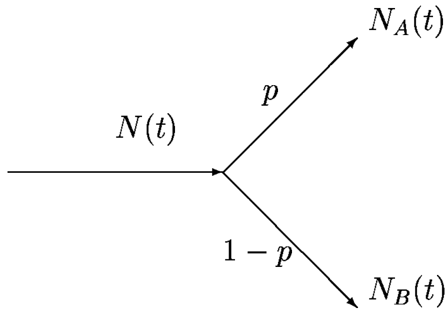
A partir de la propiedad (3.5) es posible enunciar una segunda definición para un proceso de Poisson.

El Proceso Uniforme de Poisson es un proceso de conteo tal que sobre todo conjunto de k intervalos disjuntos (t_1, t_1'), (t_2, t_2') ,....,(t_k, t_k') los números de eventos aleatorios que se producen N_1, N_2,...,N_k son independientes en probabilidad y cada uno de ellos obedece a una ley de probabilidades de Poisson, donde el parámetro para N_i es $\lambda \cdot (t_i' - t_i)$.

Muchas veces en un proceso de conteo nos interesará no sólo el número total de eventos sino distinguir distintos tipos de eventos. En otras oportunidades observaremos distintos de eventos independientemente, pero estaremos interesados sólo en el total de ellos. En lo que sigue estudiaremos ese tipo de fenómenos para el caso en que los procesos involucrados son Poissonianos.

3.2.6 División de un Proceso Uniforme de Poisson

Sea $N(t)$ un proceso uniforme de Poisson de tasa λ, tal que los eventos asociados a $N(t)$ pueden clasificarse en dos categorías, A y B. Con probabilidad p un evento de $N(t)$ es tipo A y con probabilidad $1-p$ es tipo B. De esta forma a partir del proceso $N(t)$ pueden definirse dos procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$ en donde $N_A(t)$ ($N_B(t)$) representa el número de eventos tipo A (B) que se han producido hasta t.

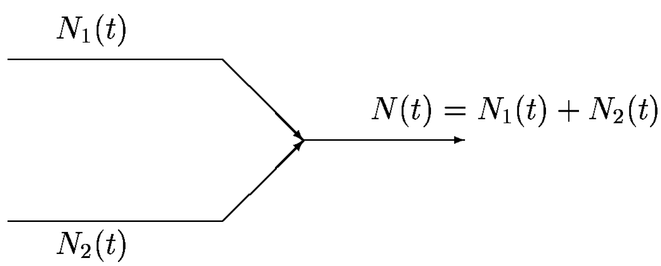


Proposición 3.1 *Los procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$ son dos procesos uniformes de Poisson independientes de tasas $\lambda_A = p \cdot \lambda$ y $\lambda_B = (1-p) \cdot \lambda$.*

La demostración se encuentra en el Apéndice 3-A.

3.2.7 Mezcla de dos Procesos Uniformes de Poisson Independientes

Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ dos procesos uniformes de Poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. A partir de estos dos procesos es posible construir un tercero que corresponda a la suma, es decir $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.



Proposición 3.2 *El proceso $N(t)$ es un proceso Uniforme de Poisson de tasa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.*

La demostración se encuentra en el Apéndice 3-A.

A lo largo de esta sección se han caracterizado los procesos de Poisson mediante dos definiciones que corresponden las formas más comunes de representarlo. La Definición 1 lo caracteriza mediante los tiempos entre eventos sucesivos, mientras que la Definición 2 lo hace a través del número de eventos producidos en un intervalo de tiempo dado. A continuación se enuncia una tercera forma de caracterizar un proceso uniforme de Poisson.

3.2.8 Tercera Definición de un Proceso de Poisson

El proceso de conteo $\{N(t)\}_{t\in R_+}$ *es un Proceso Uniforme de Poisson con tasa* λ *si:*

1. $\Pr[N(t+h)-N(t)=0]=1-\lambda\cdot h+o(h)$
2. $\Pr[N(t+h)-N(t)=1]=\lambda\cdot h+o(h)$
3. $\Pr[N(t+h)-N(t)\geq 2]=o(h)$
4. $N(t+h)-N(t)$ es independiente de $N(s)$ con $s\leq t$, $h>0$ (es decir, posee incrementos independientes).

Donde $o(h)$ *representa funciones que cumplen* $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

Corresponde ahora verificar que las tres definiciones de procesos uniformes de Poisson que se han dado son efectivamente equivalentes. Para ello se utilizará el siguiente esquema.

$$Def_1 \Rightarrow Def_2 \Rightarrow Def_3 \Rightarrow Def_1$$

- $Def_1 \Rightarrow Def_2$
  La demostración de esta primera implicancia ya fue hecha al demostrarse la Propiedad (3.5) de un Proceso Uniforme de Poisson.

- $Def_2 \Rightarrow Def_3$
  Para demostrar esta implicancia se debe probar que la segunda definición de proceso uniforme de Poisson implica los 5 puntos que conforman la tercera definición.

  1. Para probar el primero basta con observar que de acuerdo a la definición 2, $N(t;t+h)$ sigue una distribución Poisson de parámetro $\lambda\cdot h$ y por tanto la probabilidad que $N(t;t+h)=0$ viene dada por $e^{-\lambda\cdot h}$. Ahora bien, desarrollando la función exponencial como una serie de potencias se tiene:

  $$\Pr(N(t;t+h)=0)=e^{-\lambda\cdot h}=1-\lambda\cdot h+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-\lambda\cdot h)^k}{k!} \tag{3.6}$$

  Luego definiendo $o_1(h)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-\lambda\cdot h)^k}{k!}$ se tiene que $Prob(N(t;t+h)=0)=1-\lambda\cdot h+o_1(h)$. Es fácil verificar que $o_1(h)$ efectivamente es $o(h)$ (i.e. $\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{o_1(h)}{h}=0$.

  2. El segundo punto se puede probar de manera similar: dado que $N(t;t+h)$ sigue una ley de Poisson de parámetro λh, entonces $\Pr[N(t;t+h)=1]=e^{-\lambda\cdot h}\lambda\cdot h=\lambda\cdot h\Pr[N(t;t+h)=0]=\lambda\cdot h\,(1-\lambda\cdot h+o_1(h))=\lambda\cdot h-\lambda^2h^2+\lambda h o_1(h)$. Llamando

$o_2(h) = -\lambda^2 h^2 + \lambda h o_1(h)$ se tiene $\Pr[N(t;t+h) = 1] = \lambda h + o_2(h)$ (verificar que $o_2(h)$ es $o(h)$).

3. El punto 3 es directo, recordando que las probabilidades de los eventos $N(t;t+h) = 0$, $N(t;t+h) = 1$ y $N(t;t+h) \geq 2$ deben sumar 1, y verificando que la suma (diferencia) de funciones $o(h)$ es también $o(h)$.

4. Tomando los intervalos disjuntos $(0;s)$ y $(t;t+h)$ es directo de la definición 2 que el número de realizaciones al interior de cada uno de ellos son independientes entre sí.

- *$Def_3 \Rightarrow Def_1$*

  Supóngase que en el instante t_0 se produjo un evento de proceso $N(t)$ y sea T el tiempo que transcurre hasta el próximo evento. Interesa probar que bajo las hipótesis de la definición 3, T es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$. Para ello conviene expresar la probabilidad que T sea mayor $h+q$ de dos formas equivalentes. Por un lado usando el punto 1 de la definición 3 se tiene que:

$$\Pr(T > h+q) = \Pr(N(t_0;t_0+h+q) = 0) = 1 - \lambda \cdot (h+q) + o(h+q) \tag{3.7}$$

Por otro lado

$$\Pr(N(t_0;t_0+h+q) = 0) = \Pr(N(t_0;t_0+h) = 0 \wedge N(t_0+h;t_0+h+q) = 0) \tag{3.8}$$

además por punto 3, $N(t_0;t_0+h)$ y $N(t_0+h;t_0+h+q)$ son independientes. Usando el punto 4 de la definición 3 $N(t_0+h;t_0+h+q)$ tiene la misma distribución que $N(t_0;t_0+q)$. Por lo tanto uniendo estos dos resultados se tiene que :

$$\Pr(N(t_0;t_0+h+q) = 0) = \Pr(N(t_0;t_0+h) = 0) \cdot \Pr(N(t_0;t_0+q) = 0) \tag{3.9}$$

o bien

$$\Pr(T > h+q) = \Pr(T > h) \cdot \Pr(T > q) \tag{3.10}$$

es decir,

$$\frac{\Pr(T > h+q) - \Pr(T > q)}{h} = \Pr(T > q) \cdot \frac{-\lambda \cdot h + o(h)}{h} \tag{3.11}$$

tomando límite cuando h tiende a cero y ocupando el punto 5 de la definición 3 se tiene:

$$\frac{d\Pr(T > q)}{dq} = -\lambda \cdot \Pr(T > q) \Rightarrow \Pr(T > q) = e^{-\lambda \cdot q} \tag{3.12}$$

y por tanto T sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$, que es lo que se quería probar. ∎

3.3 Extensiones

3.3.1 Proceso de Poisson no Homogéneo

El proceso poissoniano estudiado hasta ahora obedece a los axiomas de Independencia y Uniformidad, lo que significa en la práctica que mantiene siempre la misma intensidad (independiente del número de eventos ya realizados y del tiempo).

En particular sobre todo intervalo $(t, t + dt)$ existe una probabilidad $\lambda \cdot dt$ de observar un evento (para dt pequeño). Sea $P(t, h)$ la probabilidad que al menos un evento se produzca en $[t, t + h]$, entonces el proceso se dice *continuo* si:

$$\lim_{h \to 0} P(t, h) = 0 \tag{3.13}$$

condición que se verifica en el proceso clásico. Además, el cuociente $\frac{P(t,h)}{h}$ admite, en el modelo clásico un límite el cual es independiente de t y corresponde a λ: densidad del proceso puntual.

Se obtiene una extensión al modelo clásico si se supone que la intensidad λ puede variar con t. Tal modelo se desarrolla fácilmente a partir del modelo clásico efectuando un *Cambio de Reloj*.

Cambio de Reloj

Sea sobre un eje de tiempo OU un proceso de Poisson de tasa λ. Designemos por $u_1, u_2, \ldots$.la secuencia de instantes en que se producen eventos.

Sea por otro lado, $u = G(t)$ una función continua, estrictamente creciente y derivable.

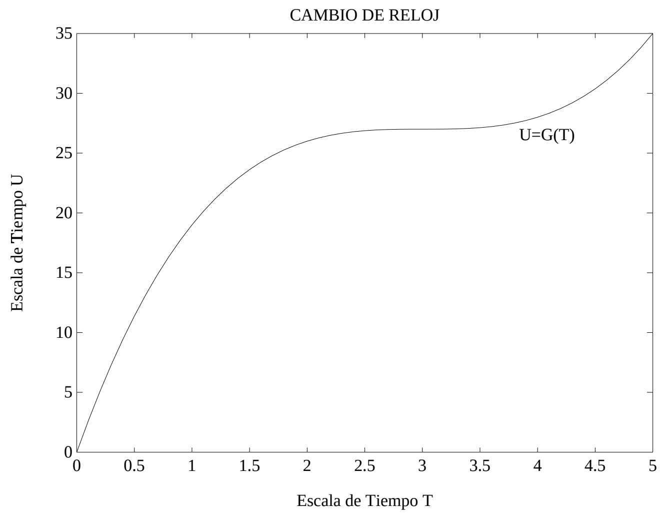
Esta función define una aplicación de (T) sobre (U) y reciprocamente de (U) sobre (T) biunívocas (G define un homomorfismo de T sobre U). Como T y U miden el tiempo: G define entonces un *Cambio de Reloj*.

Una realización del proceso descrita por la sucesión $u_1, u_2, \ldots$ en U es descrita por $t_1, t_2, \ldots$ en T con:

$$u_i = G(t_i)$$

Visto desde la escala de tiempo T la sucesión de eventos también define un proceso de conteo, que satisface las siguientes propiedades:

- Sobre intervalos disjuntos $S_1, S_2, ...$ de T los números $n_1, n_2, ...$ de eventos son independientes en probabilidad.
- Sobre todo intervalo $S = [t, t']$ de T el número de eventos $n(t, t')$ obededce a una distribución Poisson.



En efecto,el número $n(t,t')$ es igual al número de eventos realizados en $[u,u']$ en el proceso uniforme con $u = G(t)$ y $u' = G(t')$. Además, intervalos disjuntos en T están asociados a intervalos disjuntos en U a través de G.

$$n(t,t') \text{ obedece a la ley de Poisson de parámetro } \lambda(G(t') - G(t))$$

Por último, decir que un evento se produce en el intervalo $(t, t + dt)$ es equivalente a que se produzca en $(u, u + du)$ cuya probabilidad es $\lambda \cdot du$. Como $du = g(t)dt$ con $g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$, se tiene:

$$Pr\,[1 \text{ evento en } [t, t + dt]] = g(t)dt \quad \text{y} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds$$

El modelo así desarrollado sobre T es un proceso puntual que obedece al axioma de Independencia además es continuo, pero no es uniforme.

3.3.2 Proceso de Poisson en Batch

Otra extensión al proceso clásico se logra admitiendo que se produzcan 2 o más eventos simultáneamente; se dice que se produjo un evento en batch. El proceso puede ahora ser definido en probabilidad como sigue:

- La sucesión de instantes en los que se producen eventos (en batch) forman un proceso de Poisson (uniforme o no uniforme) definido por algún parámetro $\lambda(t)$.
- Cada batch agrupa un número aleatorio de realizaciones simultáneas k. El número de realizaciones en dos batch distintos son independientes en probabilidad y obedecen todos a la misma ley (arbitraria).

De acuerdo a lo anterior el número de eventos en batch que se producen en un intervalo obedece a una ley de Poisson, sin embargo, el número de eventos vistos como unidades en general no se comporta deacuerdo a una ley Poisson.

Caso Particular

Sea un proceso uniforme en batch tal que la ocurrencia de los eventos batch forman un proceso puntual uniforme de poisson de densidad λ. Sea p_k la probabilidad que k realizaciones se produzcan simultáneamente en un batch. Se estudiará la ley de probabilidad del número de eventos individuales que se producen en un intervalo de amplitud t.

Sobre este intervalo el número de batch de tamaño k (s_k) que se producen obedece a una ley Poisson de parámetro $\lambda \cdot p_k \cdot t$. La transformada z para s_k es:

$$\tilde{g}_k(z) = E(z^{s_k}) = e^{\lambda \cdot p_k \cdot t(z-1)} \tag{3.14}$$

Sea $x_k = k \cdot s_k$ el número de eventos cuyas realizaciones provienen de un batch de tamaño k, la transformada z para x_k, que se designa por $g_k(z)$ es:

$$g_k(z) = E(z_k^x) = E(z^{k \cdot s_k}) = \tilde{g}_k(z^k) = e^{\lambda \cdot p_k \cdot t(z^k-1)} \tag{3.15}$$

Por último, el número total de eventos (individuales) que se han producido hasta t corresponde a la suma de los $\{x_k\}$, de modo que su transformada z, $G(z)$, viene dada por:

$$\begin{aligned} G(z) &= \prod_k g_k(z) \\ &= e^{\sum_k [\lambda \cdot p_k \cdot t(z^k-1)]} \\ &= e^{\lambda \cdot t \sum_k [p_k \cdot z^k] - \lambda \cdot t \sum_k p_k} \end{aligned} \tag{3.16}$$

además, $\sum_k [p_k \cdot z^k] = \gamma(z)$ es la transformada z del número de realizaciones por batch mientras que $\sum_k p_k = 1$, con lo cual

$$G(z) = e^{\lambda \cdot t(\gamma(z)-1)} \tag{3.17}$$

La ley de probabilidades del número de eventos durante un intervalo de amplitud t puede, en principio, obtenerse inviertiendo la transformada en la Ecuación 3.17. Sin embargo dicha transformada depende del término $\gamma(z)$ que en general es arbitrario. Habitualmente invertirla analíticamente resultará inmanejable. Sin embargo, muchas veces puede ser invertida numéricamente, o bien a partir la Ecuación 3.17 es posible obtener los momentos de la distribución buscada mediante diferenciación sucesiva.

Por ejemplo el valor promedio de eventos durante el intervalo considerado($\bar{N}$), puede obtenerse como:

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \frac{dG(z)}{dz}|_{z=1} \\
&= \lambda \cdot t \cdot \frac{d\gamma(z)}{dz}|_{z=1} \\
&= \lambda \cdot t \cdot \bar{k}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

con $\bar{k}$ tamaño promedio de un batch. Este resultado podría haber sido obtenido por simple inspección.

3.4 EJERCICIOS

1. Sea un proceso uniforme de Poisson de densidad λ representado por una secuencia de puntos $\{M_n\}_{n \in N}$.
   Se construye un nuevo proceso a partir del anterior a través de una secuencia de puntos $\{P_n^k\}_{n \in N}$ definidos por:

   $$P_n^k = M_{k \cdot n}$$

   es decir, se conservan del proceso original los puntos tomados de k en k.
   Estudiar el proceso obtenido, determinando la ley de los intervalos entre ocurrencias.

2. Sea $P(\lambda)$ un proceso uniforme de Poisson de densidad λ. Se designan por $\{M_1, M_2, ..., M_n, ..\}$ la secuencia de puntos obtenida. Sea la secuencia de puntos $\{A_1, A_2, ..., A_n, ..\}$ definidos como $A_n =$ centro de (M_{n-1}, M_n). Estudie el proceso $R(\lambda)$ de los puntos A_n. Compare $R(1)$ y $P(2)$. Determine si los intervalos sucesivos entre ocurrencia del proceso $R(\lambda)$ son independientes. Calcule el coeficiente de correlación entre dos intervalos sucesivos.

3. Sea $P(\lambda) = \{M_1, M_2, ...\}$ un proceso uniforme de Poisson de densidad λ. Sea A un punto sobre el eje del tiempo. Cuál es la ley de probabilidad de la amplitud del intervalo (M_n, M_{n+1}) que contiene a A.
   -) Suponga primero que el proceso opera desde $t = -\infty$.
   -) Suponga que el proceso opera desde $t = 0$.

4. Sea un proceso de Poisson en batch en el cual las ocurrencias de los batch obedecen a un proceso uniforme de Poisson y para el cual el tamaño de cada batch es una varaible aleatoria con la misma ley de probabilidad L.
   Determine las leyes L para las cuales el número de eventos aleatorios elementales observados sobre todo intervalo obedece a una ley Poisson.

Apéndice

3-A Demostración Propiedades Procesos de Poisson

Propiedad 3.1 *El Proceso Uniforme de Poisson no tiene Memoria. Si U representa el tiempo entre dos eventos consecutivos, se cumple entonces que*:

$$\Pr(U > t + s/U > s) = \Pr(U > t)$$

Demostración

$$\Pr(U > t + s/U > s) = \frac{\Pr(U > t + s)}{\Pr(U > s)} \tag{3.19}$$

Como U sigue una distribución exponencial de parámetro λ se cumple que:

$$\begin{aligned} \Pr(U > t + s) &= e^{-\lambda \cdot (t+s)} \\ \Pr(U > s) &= e^{-\lambda \cdot s} \end{aligned} \tag{3.20}$$

por lo tanto, reemplazando las expresiones anteriores en (3.19) se tiene:

$$\Pr(U > t + s/U > s) = e^{-\lambda \cdot t} = \Pr(U > t) \qquad \blacksquare \tag{3.21}$$

Propiedad 3.4 *S_n tiene una distribución Erlang de parámetros n y λ, es decir, su función de densidad viene dada por*:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{(n-1)!} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in N$$

Demostración
Se tiene que $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$, es decir, S_n es la convolución de los n primeros U_i.

Recordemos que si X e Y son v.a. independientes. la transformada de la convolución de X e Y es igual al producto de las transformadas de X e Y.

Usando ese resultado se tiene que la transformada de S_n es el producto de las transformadas de los U_i (pues los $\{U_i\}$ son independientes). Ahora

$$T_{U_i}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s} \tag{3.22}$$

luego, la transformada de S_n es:

$$T_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} T_{U_i}(s) = \left[\frac{\lambda}{\lambda + s}\right]^n \tag{3.23}$$

la inversa de la transformada anterior corresponde a

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{(n-1)!} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in N$$

es decir, una distribución Erlang. ∎

Propiedad 3.5 *$N(t)$ tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda \cdot t$. Luego su función de repartición es:*

$$\Pr[N(t) = k] = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{k!} \quad \forall k \in N$$

Demostración

Sea $(AB) = T$ un intervalo de tiempo dado. Designemos por p_k la probabilidad que se produzcan k eventos exactamente en (AB) y Pi_k la probabilidad que se produzcan al menos k, luego $\Pi_k = p_k + p_{k+1} + \dots\dots\dots$ Sean $\{t_i\}_{i=1}^k$ los instantes en que se producen eventos $(A < t_1 < t_2 < \dots < t_k)$.

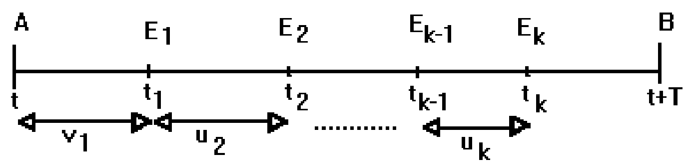


Fig. A.1

La duración $(AE_k) = v_1 + u_2 + \dots\dots + u_k$. Como $u_2, u_3, ..., u_k$ son duraciones aleatorias independientes, cada una de ellas sigue una distribución exponencial de parámetro λ , además como la distribución exponencial no tiene memoria v_1 también tiene una distribución exponencial de parámetro *lambda*. Luego (AE_k) es la suma de k variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, la suma obedece a una distribución Erlang de parámetros (λ, k). Luego

$$\begin{aligned}
\Pi_k &= Prob((AE_k) < T) \\
&= \int_0^T \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} dt \\
p_k &= \Pi_k - \Pi_{k+1} \\
&= \int_0^T \lambda \left[\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{(\lambda T)^k \cdot e^{-\lambda T}}{k!} \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. ∎

Propiedad 3.6 *Sea (AB) un intervalo de tiempo dado. Sea $OA = a$ y $OB = b$. Si se sabe que n eventos se produjeron en (AB) y t_1 , t_2 ,......, t_n son los instantes en los que* *estos eventos ocurrieron ($a \leq t_1 < t_2 < .... < t_n \leq b$), entonces los n eventos se reparten Uniformemente en el intervalo (AB). Es decir, la función de distribución conjunta de los t_1 , t_2 ,......, t_n viene dada por:*

$$f(t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \qquad a \leq t_1 < t_2 < .... < t_n \leq b$$

<u>Demostración</u>
Sea (AB) un intervalo de tiempo tal que $(OA) = a$ y $(OB) = b$ y n eventos se han producido en (AB).

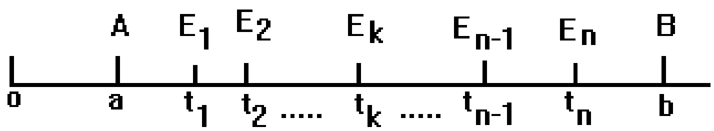


Fig. A.2

la probabilidad de obtener n eventos en los instantes $t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n$ o más exactamente en los intervalos $(t_1; t_1 + dt_1), (t_2; t_2 + dt_2), ..., (t_k; t_k + dt_k), ..., (t_n; t_n + dt_n)$ es:

$$\begin{aligned} P &= [e^{-\lambda(t_1-a)}\lambda dt_1] \cdot [e^{-\lambda(t_2-t_1)}\lambda dt_2] \cdots [e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\lambda dt_n] \cdot e^{-\lambda(b-t_n)} \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda(b-a)} dt_1\, dt_2 \cdots dt_n \end{aligned} \tag{3.25}$$

Además la probabilidad de obtener n eventos en (AB) es:

$$Q = \frac{\lambda(b-a)^n \cdot e^{-\lambda(b-a)}}{n!} \tag{3.26}$$

Finalmente la probabilidad buscada es el cuociente entre P y Q es decir:

$$\frac{n!}{(b-a)^n} dt_1\, dt_2 \cdots dt_n \qquad a \leq t_1 \leq t_2 \leq ..... \leq t_n \tag{3.27}$$