Modelos de Decisión en Ambientes Inciertos

(Apunte de Clases para el Curso Investigación Operativa IN44A)

Departamento de Ingeniería Industrial - Universidad de Chile

René A. Caldentey Susana V. Mondschein [1]

Enero, 1999

[1] La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 1

Decisiones Bajo Incertidumbre y Árboles de Decisión

Continuamente nos vemos enfrentados a la necesidad de tomar decisiones. Frecuentemente las decisiones se toman en presencia de incertidumbre: existen factores relevantes para el resultado cuyo comportamiento no se conoce al momento de decidir, sino que se observará cuando la decisión ya esté tomada. Por lo general, la solución a este tipo de problemas depende de la experiencia del *tomador de decisiones* y de ciertas características personales como su aversión al riesgo. Ello hace que no exista una solución única a un problema de decisión bajo incertidumbre, sino que más bien ésta depende de la persona que debe decidir. Por ejemplo, salir de casa una mañana de invierno y decidir si llevar o no paraguas es una decisión bajo incertidumbre que puede cambiar mucho entre una persona de 20 años y una de 70 años. Lo que se busca entonces es encontrar la mejor solución dado un cierto *criterio*.

En este capítulo se presenta la teoría básica de decisión bajo incertidumbre. En primer lugar se describe los elementos básicos de un proceso de decisión.

1.1 Elementos del Proceso de Toma de Decisión Bajo Incertidumbre

En esta sección revisaremos los elementos esenciales de un problema de decisión bajo incertidumbre, los cuales es necesario especificar para conseguir una adecuada descripción del problema. Lo haremos a partir del ejemplo que se describe a continuación.

Un agricultor debe decidir qué uso dar a su terreno para el próximo período productivo. Las características del terreno lo hacen favorable para el cultivo de trigo, espárragos, papas y tomates. El factor preponderante en la calidad de la producción es el clima, cuyos posibles estados son:

- Clima Seco
- Clima Normal
- Clima Lluvioso

El agricultor sabe que el clima Normal es dos veces más probable que el clima Seco o Lluvioso. Además, por experiencia él conoce cuáles son sus utilidades en función del producto escogido y el tipo de clima observado, las que se detallan en la siguiente tabla:

TABLA DE UTILIDADES [$]

	Trigo	Espárragos	Papas	Tomates
Seco	1	3	5	4
Normal	4	7	6	5
Lluvioso	8	6	6	5

Por último, el agricultor puede arrendar el terreno por el período en 5.5.

1.1.1 Conjunto de Acciones Posibles

En todo proceso de toma de decisión, el tomador de decisión debe escoger alguna acción a de un conjunto de acciones posibles A.

En el ejemplo anterior el agricultor debe decidir en primer lugar si cultivar o arrendar el terreno, y en el caso de decidir cultivar, debe escoger el tipo de cultivo. Luego, las posibles acciones a seguir son:

1. a_1: cultivar trigo
2. a_2: cultivar espárragos
3. a_3: cultivar papas
4. a_4: cultivar tomates
5. a_5: arrendar

1.1.2 Conjunto de Estados Posibles del Mundo

Los procesos de toma de decisión bajo incertidumbre se caracterizan por el hecho que el mundo o sistema en estudio pueda adoptar más de un estado posible, el cual no se conoce al momento de tomar la decisión. Denotaremos por S al conjunto de estados posibles del mundo.

En el ejemplo anterior, los posibles estados del mundo están relacionados con el tipo de clima, es decir:

1. s_1: clima Seco
2. s_2: clima Normal
3. s_3: clima Lluvioso

1.1.3 Ley de Probabilidades

Para hacer de la incertidumbre un elemento manejable, es necesario conocer alguna Ley de Probabilidades que rija el comportamiento de los posibles estados del mundo, es decir conocer, para cualquier conjunto $B \subseteq S$, la probabilidad que el estado que adopte el mundo sea alguno de los pertenecientes al conjunto B. Si S es un conjunto discreto denotaremos por p_s la probabilidad que el mundo adopte el estado $s \in S$.

En el ejemplo, $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.5$ y $p_3 = 0.25$.

1.1.4 Matriz de Beneficios

El último elemento básico requerido para describir un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre corresponde a los beneficios (o costos) asociados al resultado combinado de la acción elegida y el estado adoptado por el mundo. Vale decir debemos conocer una función $R : A \times S \longrightarrow I\!R$, donde $R(a, s)$ indica cuál es el beneficio (o premio, pago, costo, utilidad, castigo, etc.) obtenido si la acción elegida fue a y el estado adoptado por el mundo fue s. Si los conjuntos A y S son numerables ordenaremos los beneficios en una matriz de beneficios $R = [r_{ij}]$, donde r_{ij} corresponde al beneficio percibido si la acción tomada es a_i y el estado del mundo es s_j.

En el ejemplo se tiene:

MATRIZ DE BENEFICIOS

	Trigo	Espárragos	Papas	Tomates	Arrendar
Seco	1	3	5	4	5.5
Normal	4	7	6	5	5.5
Lluvioso	8	6	6	5	5.5

Una vez identificados y conocidos estos elementos se cuenta con una adecuada descripción de un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre; podemos decir que conocemos el problema. El siguiente paso es resolverlo, i.e. determinar cuál es la acción que conviene seguir. Tengamos un poco de paciencia, y respondamos primero otra pregunta: ¿Cuál es la acción que *no* se debe tomar? Observemos por un momento la matriz de beneficios que enfrenta nuestro agricultor. ¿Resulta conveniente plantar tomates? Supongamos que dos agricultores enfrentan este mismo problema, y uno planta tomates y el otro papas. ¿Cuál de ellos obtendrá un mayor beneficio? Casos como éste nos llevan a definir el concepto de *Acción Dominada*.

Definición 1.1 (Acción Dominada) *Una acción a_1 es dominada por una acción a_2, si*

$$\begin{aligned} R(a_1, s) &\leq R(a_2, s) \qquad \forall s \in S \\ R(a_1, s) &< R(a_2, s) \qquad \textit{para algún } s \in S \end{aligned} \tag{1.1}$$

Reconocer dentro del conjunto de acciones posibles cuáles son *Acciones Dominadas* permite reducir el número de posibilidades de acción, pues una acción Dominada nunca será elegida como la acción a seguir independiente del criterio que se utilice (criterio racional maximizador de utilidad).

En el ejemplo, la acción cultivar tomates es dominada por la acción cultivar papas. Luego, desde el punto de vista de la maximización de utilidades, el agricultor preferirá plantar papas a tomates pues independiente del estado climático las papas le reportarán mayores ingresos que los tomates.

Pasemos ahora a la pregunta que nos interesa ¿Qué debe hacer nuestro agricultor con su terreno? Estudie los beneficios y probabilidades asociadas a los distintos estados y tome su decisión. Pregunte enseguida a otras personas. ¿Coinciden las respuestas? A menos que haya preguntado a un grupo de personas bastante homogéneo, las respuestas no coincidirán. En cualquier problema de toma de decisiones bajo incertidumbre veremos que distintos individuos toman distintas decisiones, pues deciden en base a distintos *criterios.*

1.2 Criterios de Decisión

En un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre no sabemos a priori cuál es el beneficio que reportaría tomar una acción determinada, pues éste en general depende del estado que adopte el mundo, el cual no es conocido. De esa forma, cuando el tomador de decisiones evalúa qué tan buena es una acción lo hace considerando simultáneamente todos los resultados o escenarios posibles, y "mezclándolos" de alguna manera. Los distintos tomadores de decisiones difieren en su manera de combinar los escenarios ("buenos" y "malos") asociados a una acción al momento de evaluarla y es por ello es que sus decisiones difieren. Estas diferencias en la manera de evaluar una acción dada a partir de la totalidad de sus escenarios posibles da cuenta de distintos grados de *Aversión al Riesgo* entre los tomadores de decisiones. El concepto de aversión al riesgo es fundamental en la toma de decisiones bajo incertidumbre. No es, sin embargo, nuestro propósito discutirlo aquí (si ud. no lo ha estudiado antes puede consultar en textos de Economía, como los de Varian o Kreps), sino que sencillamente consideraremos que los distintos tomadores de decisiones difieren en la función objetivo que buscan maximizar, a la que llamaremos el *Criterio de Decisión* que utilizan.

A continuación se detallan algunos ejemplos de criterios de decisión.

1.2.1 Criterio MAXIMIN

El criterio *MAXIMIN* busca, como su nombre lo abrevia, escoger la acción que maximice el menor resultado que es posible obtener con dicha acción. Es decir, para cada decisión, se determina el peor escenario (el de beneficio menor) y se escoge la acción que tenga el Mejor Peor Resultado. Así, un tomador de decisiones que utiliza el criterio MaxiMin resuelve:

$$\max_{a\in A}\left(\min_{s\in S} R(a,s)\right)$$

En el ejemplo se tiene:

CRITERIO MAXIMIN

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	**1**	**3**	**5**	**5.5**
Normal	4	7	6	**5.5**
Lluvioso	8	6	6	**5.5**

Para cada posible acción (eliminando las acciones dominadas) se ha **destacado** el peor escenario. En los casos de cultivos el peor escenario se encuentra en un estado climático Seco, para la decisión de arrendar el beneficio es constante y por tanto todos los escenarios climáticos son equivalentes.

Aplicando el criterio MAXIMIN se tiene que la decisión de arrendar presenta el mayor menor valor de 5.5 . El agricultor al arrendar el terreno nunca ganará menos de 5.5, y ninguna de las otras acciones ofrece semejante garantía. Este criterio de decisión puede ser visto como un caso de extrema aversión al riesgo.

1.2.2 Criterio MAXIMAX

El criterio MAXIMAX busca escoger la acción que maximice el mayor resultado que es posible escoger.

$$\max_{a \in A} \left(\max_{s \in S} R(a, s) \right)$$

En la siguiente tabla se encuentran destacados los mayores posibles resultados de cada acción:

CRITERIO MAXIMAX

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	1	3	5	**5.5**
Normal	4	**7**	**6**	**5.5**
Lluvioso	**8**	6	**6**	**5.5**

De acuerdo al criterio MAXIMAX , la decisión de plantar trigo es la que presenta el mayor mejor resultado, que es de 8, el que se alcanza en un escenario climático Lluvioso. El inconveniente de este criterio es que deja de lado los peores escenarios, y en el ejemplo anterior si bien plantar trigo puede traducirse en el mayor beneficio (8), también puede transformarse en el peor beneficio (1) si es que el clima resulta seco.

1.2.3 Criterio Mínimo Arrepentimiento

El criterio de Mínimo Arrepentimiento (desarrollado por L.J. Savage, 19??) se apoya en el concepto de costo de oportunidad asociado a una decisión. Para cada posible estado del mundo s , se busca la acción $a^*(s)$ que maximice $R(a, s)$. Es decir, $a^*(s)$ es la mejor acción a elegir si el estado del mundo es s . Luego, para cualquier acción a y estado s el Arrepentimiento de esa decisión viene dado por:

$$Arr(a, s) = R(a^*(s), s) - R(a, s) \tag{1.2}$$

Para cada posible acción se determina el mayor Arrepentimiento y luego se selecciona aquella acción con el menor mayor arrepentimiento, es decir, se resuelve:

$$\min_{a \in A} \max_{s \in S} \{Arr(a, s)\}$$

Si se aplica este método al ejemplo, el primer paso es la determinación de $a^*(s)$. En la siguiente tabla aparecen destacados los mejores resultados posibles para cada estado del mundo.

MINIMO ARREPENTIMIENTO

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	1	3	5	**5.5**
Normal	4	**7**	6	5.5
Lluvioso	**8**	6	6	5.5

por ejemplo, en caso de existir clima Normal la mejor acción a tomar es cultivar Espárragos.

Una vez identificado $a^*(s)$ se debe construir la matriz de arrepentimiento $Arr(a, s)$.

MATRIZ DE ARREPENTIMIENTO

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	**4.5**	**2.5**	0.5	0
Normal	3	0	1	1.5
Lluvioso	0	2	**2**	**2.5**

A partir de la matriz de arrepentimiento se determina para cada acción el mayor arrepentimiento (valor destacado) y finalmente se busca la acción que tenga el menor mayor arrepentimiento. En este caso corresponde a la decisión de cultivar papas cuyo mayor arrepentimiento es de 2 y se produciría en caso de existir clima Lluvioso.

1.2.4 Criterio del Valor Esperado

El criterio del *Valor Esperado* elige la acción que tenga el mayor valor esperado. El valor esperado asociado a una acción $a \in A$ viene dado por :

$$VE(a) = \sum_j R(a, s_j) \cdot p_j \quad \text{Si } S \text{ es numerable, o bien}$$

$$VE(a) = \int_{s \in S} R(a, s) dF(s),$$

donde F representa la función de distribución sobre S.

Luego el criterio de *Valor Esperado* busca la acción a^* tal que $VE(a^*) = \max_{a \in A} VE(a)$.

En el ejemplo se tiene:

VALOR ESPERADO

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco (0.25)	1	3	5	5.5
Normal (0.5)	4	7	6	5.5
Lluvioso (0.25)	8	6	6	5.5
V. Esperado	4.25	5.75	5.75	5.5

Según este criterio, el agricultor es indiferente entre cultivar Espárragos o Papas.

1.3 Comparación entre los Criterios Presentados

CRITERIO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
MAXIMIN (visión pesimista)	- Disminuye el riesgo asociado a escenarios malos.	- No incorpora en la toma de decisión los escenarios favorables. - No utiliza la distribución de probabilidades.
MAXIMAX (visión optimista)	- Decide en función de los escenarios favorables	- No incorpora los escenarios desfavorables. - No utiliza la distribución de probabilidades
ARREPENTIMIENTO (visión neutral)	- Incorpora los escenarios favorables y desfavorables. - Busca reducir el riesgo	- No distingue escenarios buenos y malos. - No utiliza la distribución de probabilidades
VALOR ESPERADO (visión de largo plazo)	- Incorpora la ley de probabilidades. - Muy bueno en problemas de toma de decisión que se repiten muchas veces en el tiempo	- No incorpora medida de variabilidad en los resultados.

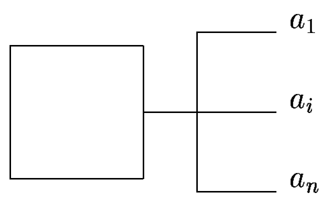
1.4 Árboles de Decisión

Los árboles de decisión representan un método ordenado de trabajo para resolver un problema de toma de decisiones. Su utilidad aumenta al aumentar la complejidad y tamaño del problema en estudio y su principio básico es la *descomposición*, es decir transformar un problema grande en varios problemas pequeños y sencillos. Árboles de decisión son particularmente provechosos en situaciones en que se verifican dos características: (i) se debe tomar decisiones en diferentes momentos del tiempo y (ii) entre una decisión y la siguiente se obtiene nueva información (relevante para las decisiones que siguen).

1.4.1 Notación

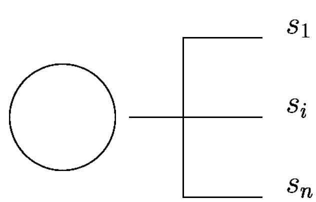
Un árbol de decisión se representa mediante un grafo dirigido con estructura arborescente (sin ciclos). Existe un nodo inicial o raíz, y de cada nodo salen ramas (arcos) que lo conectan con otros nodos. Un nodo al que llega una rama representa un evento que ocurre *después* del evento representado por el nodo del que sale dicha rama. En el proceso de toma de decisión bajo incertidumbre se distinguen dos tipos de eventos, los cuales en un árbol de decisión se denotan mediante dos tipos de nodos.

1. Nodos de Decisión: representan las decisiones, aquellos puntos en el proceso de decisión en que el tomador de decisiones puede (debe) escoger una acción de un conjunto de acciones posibles. La notación utilizada en los árboles de decisión para este evento es

   El nodo cuadrado indica que se debe tomar una decisión, y las ramas que de él salen representan las posibles acciones a seguir.

2. Nodos de Eventos Aleatorios: representan la realización de un evento aleatorio, aquellos instantes en el proceso de decisión en los que se observa una variable aleatoria (cuyo valor era, hasta ese momento, incierto). La notación utilizada para describir el Evento Aleatorio es:

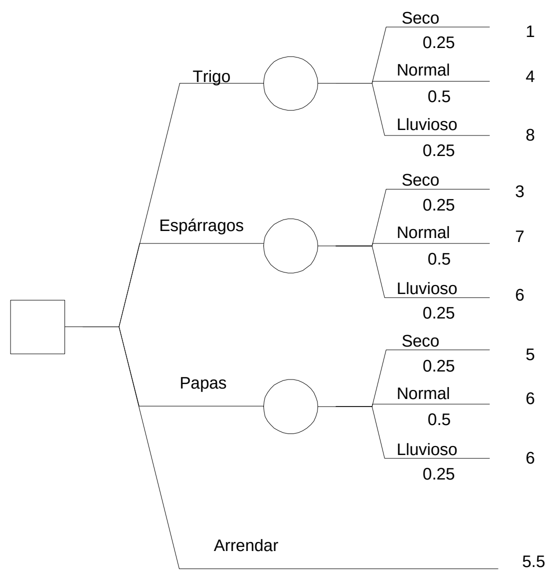
   El nodo circular indica la realización de un evento aleatorio, y las ramas que de él salen representan los posibles valores que la variable aleatoria puede tomar.

Suponiendo que se deba tomar un número finito de decisiones, cualquier camino que parte desde la raíz y avanza de un nodo a otro a través de las ramas del árbol tendrá un final (un punto en el que ya se han realizado todas las variables aleatorias y no quedan decisiones a tomar). En esos puntos se ubican nodos terminales (hojas) en los cuales se especifica el beneficio obtenido si se han tomado las decisiones asociadas a ese camino y las variables aleatorias han tomado los valores asociados a ese camino.

<u>EJEMPLO:</u> El problema del agricultor, representado mediante un árbol de decisión, se presenta en la Figura 1.1.

Este problema es muy sencillo, se debe tomar sólo una decisión y sólo interviene un evento aleatorio. Primero se decide qué uso dar al terreno, en seguida se observa el clima, y en función de ello se obtienen los beneficios asociados. Los valores indicados en las ramas que salen de los nodos aleatorios son las probabilidades asociadas a cada uno de los posibles resultados.

Figura 1.1: Árbol de Decisión para el Problema del Agricultor



1.4.2 Resolución

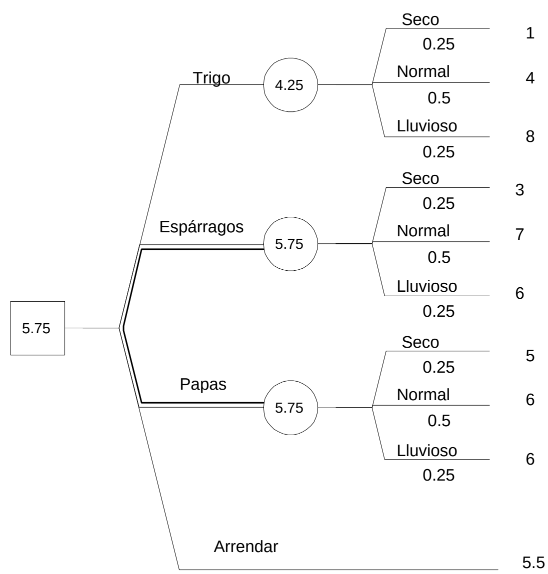
Los árboles de decisión no corresponden a un criterio de decisión, sino que es necesario definir el criterio a utilizar. En lo que sigue se utiliza como criterio la *Maximización del Valor Esperado*, pero la estructura de árbol no impone la utilización de ese criterio (se podría haber utilizado cualquier otro).

Para resolver un árbol de decisión se realiza un barrido del árbol desde las ramas terminales hacia la raíz. En cada nodo aleatorio se calcula un indicador agregado del beneficio asociado a ese nodo, combinando los beneficios que se alcanzan a partir de cada una de las ramas que salen de él y las probabilidades asociadas a ellas (la manera de combinarlos depende del criterio de decisión utilizado). Dicho indicador es considerado el beneficio asociado a ese nodo. En cada nodo de decisión se selecciona la acción que reporte el mayor beneficio, y se considera que dicho beneficio es el beneficio asociado al nodo en cuestión.

En la Figura 1.2 se presenta la resolución del problema del agricultor mediante la utilización de árboles de decisión:

En primer lugar se calcula el beneficio asociado a los nodos aleatorios, combinando los beneficios asociados a los nodos terminales y las probabilidades de cada estado climático. Dado que estamos utilizando el criterio de maximización del valor esperado, el beneficio asociado a estos nodos es el valor esperado de los beneficios que se pueden obtener a partir de ellos. Así, por ejemplo, para el caso del trigo, el beneficio esperado es 4.25. En seguida, se calcula el beneficio asociado al nodo de decisión, el cual es el máximo de los beneficios (esperados) alcanzables a través de las distintas acciones posibles. En este caso, dicho máximo es 5.75, y se alcanza ya sea cultivando papas o espárragos. Para señalar gráficamente la acción elegida

Figura 1.2: Resolución del Problema del Agricultor



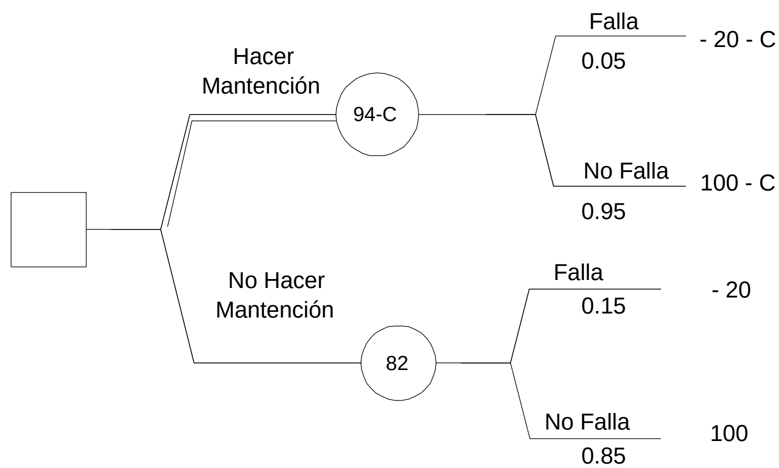
se la destaca con una doble línea.

A medida que un árbol de decisión crece los eventos aleatorios y decisiones están, en general, condicionados por los eventos anteriores.

Ejemplo: supongamos que se debe decidir si hacer o no mantención a una máquina. Si no se le hace mantención existe una probabilidad de un 15% de que la máquina falle. Si se hace mantención dicha probabilidad se reduce a la tercera parte. Si la máquina no falla, su operación arrojará utilidades por \$100. Si la máquina falla, habrá pérdidas por \$20. El costo de la mantención es $C = 10$. La Figura 1.3 muestra la solución del ejemplo anterior: conviene realizar la mantención (si C fuera mayor que 12 sería mejor no realizarla). Se debe notar que la probabilidad de falla está condicionada por la decisión (previa) de hacer o no mantención. En general, en un árbol de decisión, la ley de probabilidades asociada a un nodo aleatorio es una ley condicional en las decisiones previas y en los valores de las variables aleatorias ya observadas (puede ser, por supuesto, independiente de algunas de ellas: en el ejemplo del agricultor discutido antes la probabilidad de tener clima Normal, Seco o Lluvioso no depende de qué haya decidido cultivar el agricultor). En el cálculo de la Ley de Probabilidades Condicional el **Teorema de Bayes** aparece como una herramienta muy importante.

Teorema 1.1 *(Teorema de Bayes): Sea $\{A_i\}_1^n$ una partición del conjunto fundamental de eventos (Ω) de un cierto fenómeno aleatorio y sea E un evento cualquiera contenido en Ω. La probabilidad de ocurrencia de un elemento A_i de la partición, dada la ocurrencia de E*

Figura 1.3: Ejemplo



puede escribirse como:

$$P(A_i/E) = \frac{P(E/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E/A_j) \cdot P(A_j)} \tag{1.3}$$

O bien, utilizando el teorema de las probabilidades totales $P(E) = \sum_{j=1}^{n} P(E/A_j) \cdot P(A_j)$ se tiene:

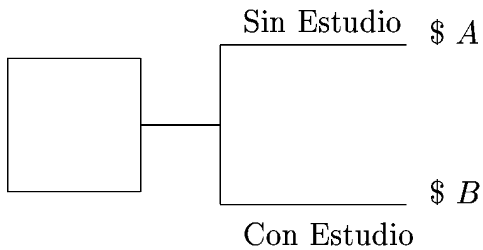
$$P(A_i/E) = P(E/A_i) \cdot \frac{P(A_i)}{P(E)} \tag{1.4}$$

1.4.3 Valor Esperado de la Información

Cuando se desea resolver un problema con incertidumbre, mientras *menor* sea la incertidumbre mejor será la decisión tomada. Considere nuevamente el problema del agricultor planteado al comienzo de este capítulo. Ya vimos en la Figura 1.2 que decide cultivar ya sea papas o espárragos, obteniendo un beneficio esperado de sólo \$5.75. Revise la matriz de beneficios presentada en la Sección 1.1.4. Si el agricultor pudiera saber de antemano que el clima resultará ser lluvioso, entonces cultivaría trigo, y obtendría un beneficio de \$8; si supiera de antemano que el clima resultará ser normal, entonces cultivaría espárragos, y obtendría un beneficio de \$7; si supiera de antemano que el clima resultará ser seco, entonces arrendaría el,terreno, y obtendría un beneficio de \$5.5. Vale decir, si el pudiera conocer el estado el clima antes de decidir, tomaría decisiones distintas (y para cada caso mejores) a las que toma cuando el clima es incierto.

Cuando hablamos de *valor de la información* nos referimos a la mejora en la calidad de las decisiones (aumentos en los beneficios) debidos a la disminución de incertidumbre que la información proporciona.

Figura 1.4: Valor de un Estudio



Al momento de tomar una decisión cualquiera puede existir la posibilidad de comprar un estudio que entregue información adicional (i.e. disminuya la incertidumbre). Luego, la existencia de un estudio agrega una nueva decisión en el problema y ésta es la de tomar o no el estudio representada en la Figura 1.4. Es claro que al incorporar un estudio las decisiones tomadas mejoran y por tanto los beneficios esperados de dichas decisiones aumentan ($B > A$) [1]. Por lo tanto es posible calcular el valor esperado de la información (que corresponde al valor máximo a pagar por el estudio, si el criterio de decisión utilizado es el de maximización del valor esperado) como la diferencia entre los beneficios esperados asociados a la toma de decisión con y sin el estudio.

Valor Máximo Dispuesto a Pagar por el Estudio = \$ $(B - A)$

1.4.4 Valor Esperado de la Información Perfecta

Resulta normal pensar que todo estudio tiene un margen de error y que mientras menor sea este margen mejor es el estudio. Cuando un estudio carece de error en sus predicciones se dice que entrega información perfecta. Lo anterior no significa que las fuentes de incertidumbre desaparecen o dejan de afectar el resultado final de la operación, lo que ocurre es que los resultados de éllas son conocidas antes de tomar la decisión. Al igual que en la sección anterior, el valor de la información perfecta se calcula como la diferencia entre el beneficio esperado con información perfecta y el beneficio esperado de la mejor alternativa sin estudio.

1.4.5 Probabilidad de las distintas respuestas de un estudio

A continuación se describe mediante un ejemplo el cálculo de probabilidades en los casos en que se realizan estudios o "tests" para "mejorar" la información sobre los posibles estados aleatorios de la naturaleza.

Se sabe que el 40% de la población en Santiago ha tenido varicela (peste cristal), virus

[1] El beneficio asociado a las decisiones tomadas con estudio (\$ B) no incorpora el costo del estudio.

que permanece en la sangre de por vida [2].

1. Mediante un test de sangre es posible detectar si la persona ha tenido la enfermedad con absoluta certeza, es decir, si el test resulta positivo la persona efectivamente ha tenido varicela y si el test es negativo la persona no ha tenido la enfermedad.

   Según el enunciado anterior sabemos que si el test es positivo, entonces la persona tuvo varicela con probabilidad uno, y si es negativo la persona no ha tenido la enfermedad, también con probabilidad uno.

   ¿Cuál es la probabilidad de que **el test a una persona cualquiera entregue un resultado positivo**?

   Dado que el test nunca se equivoca, "la fracción de veces que detecta la enfermedad" debe corresponder a la fracción de portadores de virus que existe en la realidad, es decir, un 40%. Podemos formalizar esta afirmación usando probabilidades totales.

   Definición de notación:

   V = la persona ha tenido varicela.

   N = la persona no ha tenido varicela.

   TV = el test es positivo, es decir el test dice que la persona ha tenido varicela.

   TN = el test es negativo, es decir el test dice que la persona no ha tenido varicela.

   $$\Pr(V) = \Pr(V|TV)\Pr(TV) + \Pr(V|TN)\Pr(TN)$$

   Sabemos que $\Pr(V) = 0.4$, $\Pr(V|TV) = 1$ y $\Pr(V|TN) = 0$. Además $\Pr(TV) + \Pr(TN) = 1$.

   Reemplazando tenemos:

   $$0.4 = 1 \cdot \Pr(TV) + 0 \cdot (1 - \Pr(TV)).$$

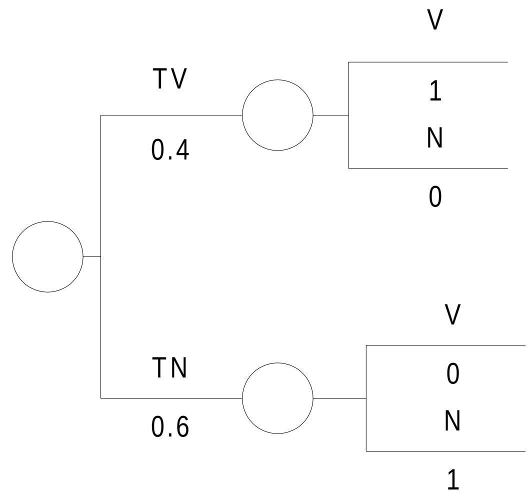
   Por lo tanto, $\Pr(TV) = 0.4$ y $\Pr(TN) = 0.6$, vale decir la probabilidad de obtener un determinado resultado en el test es igual a la probabilidad que ese resultado se dé efectivamente en la naturaleza (en este caso la fracción de la población que ha tenido o no varicela).

   Observación: Notar que no hemos incluido ninguna decisión para centrarnos en el cálculo de probabilidades. En general se podrá decidir la aplicación o no del test y, una vez conocido el resultado, se podrá tomar otras decisiones (tratamientos?).

2. Suponga ahora que el test disponible verdaderamente no es tan preciso como el anterior. Mediante un muestra de sangre sabemos que el test tiene la siguiente precisión: si el test sale positivo (es decir, dice que la persona tiene la enfermedad) entonces con probabilidad 80% efectivamente la persona tuvo varicela. Por otra parte, si el test sale

[2] Por favor, no se alarme. La información es completamente ficticia.

Figura 1.5: Test con información perfecta



negativo (el test dice que la persona no tuvo la enfermedad) entonces con probabilidad 90% la persona efectivamente no tuvo la enfermedad.

Al igual que en el caso anterior, nos preguntamos:

¿Cuál es la probabilidad de que **el test a una persona cualquiera entregue un resultado positivo**?

Una respuesta apresurada podría ser que se conservan las mismas probabilidades de toda la población (0.4 de que sea positivo). Sin embargo es fácil darse cuenta que eso no es necesariamente cierto. Imaginemos un test que, de resultar negativo, entonces es seguro que la persona no ha contraído la enfermedad; sin embargo, de resultar positivo, no es seguro que la persona haya tenido varicela: el test puede estar equivocado. Ese examen arroja positivo a todas aquellas personas que han tenido la enfermedad, y además arroja positivo a personas que no la han sufrido, vale decir arroja un resultado positivo con una mayor frecuencia de la que se da la enfermedad en la población. Más aún, un test podría tener más (o menos) resultados posibles que estados hay en la naturaleza. En nuestro ejemplo, el examen de sangre podría tener tres resultados posibles: positivo, incierto y negativo (donde obtener un resultado incierto podría significar, por ejemplo, que es igualmente probable que la persona haya tenido varicela o que nunca haya estado enferma).

¿Cuál es entonces la respuesta a nuestra pregunta? Notemos que *la posibilidad de hacer* un test no afecta a la naturaleza: la probabilidad a priori que una persona haya tenido varicela sigue siendo de un 40% (es la probabilidad a posteriori la que se ve modificada según sea el resultado del test). Podemos utilizar esa condición para calcular las probabilidades de obtener uno u otro resultado en el test.

Nuevamente podemos escribir:

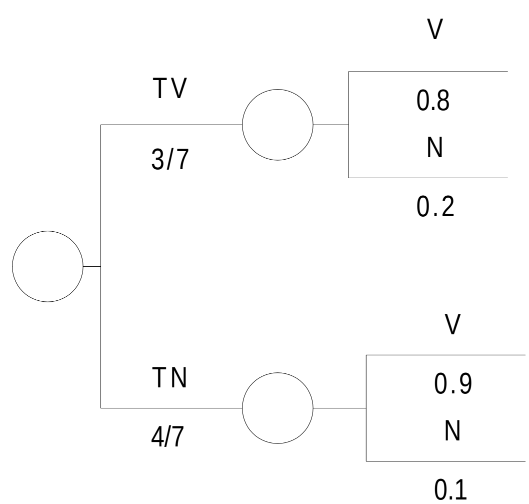
$$\Pr(V) = \Pr(V|TV)\Pr(TV) + \Pr(V|TN)\Pr(TN)$$

donde las únicas incógnitas son $\Pr(TV)$ y $\Pr(TN)$, que además deben sumar 1. Poniendo $\Pr(TN) = 1 - \Pr(TV)$ en la ecuación anterior y despejando $\Pr(TV)$ tenemos

$$\Pr(TV) = \frac{\Pr(V) - \Pr(V|TN)}{\Pr(V|TV) - \Pr(V|TN)},$$

suponiendo $\Pr(V|TV) \neq \Pr(V|TN)$ (si fueran iguales el test no aporta ninguna información: el conocer el resultado del test no modifica nuestra opinión respecto de lo verosímil que es que la persona haya tenido la enfermedad). Con los números del ejemplo $\Pr(TV) = \frac{3}{7}$ y $\Pr(TN) = \frac{4}{7}$, como se muestra en la Figura 1.6.

Figura 1.6: Test con información imperfecta



Generalizando, tenemos estados posibles en la naturaleza $X_1, \ldots, X_n$, con probabilidades de ocurrencia $p_1, \ldots, p_n$. Un test arroja m resultados posibles, $T_1, \ldots, T_m$, y, dado el resultado del test, conocemos la probabilidad de ocurrencia de los distintos estados, vale decir conocemos $r_{ij} = \Pr[X_i|T_j] \quad \forall\ i = 1, n$ y $j = 1, m$. Nos interesa determinar $q_1, \ldots, q_m$, la probabilidad que el test arroje cada uno de los posibles resultados. Aplicar probabilidades totales al igual que en el ejemplo permite escribir:

$$p = R \cdot q$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

En dicho sistema al menos una (cualquiera) de las ecuaciones es redundante, pues $\{p_i\}_{i=1}^n$ y $\{r_{ij}\}_{i=1}^n$ son leyes de probabilidad, y por tanto la suma de los elementos de cada uno de esos conjuntos debe ser 1. El sistema de ecuaciones puede estar sobre o sub determinado, según sea la relación entre el número de estados posibles en la naturaleza y el número de resultados posibles del test. En la medida que la descripción corresponda a un test que efectivamente puede existir el sitema tendrá solución, si bien ésta podría no ser única (caso en el que se requiere de más información respecto del test).

EJEMPLO:

Volvamos al problema del agricultor utilizado a lo largo de este capítulo, pero supongamos ahora que él puede acceder a un estudio climático antes de tomar su decisión. Las características del estudio son las siguientes:

- El resultado del estudio es un pronóstico de Clima Seco, Normal o Lluvioso.
- La probabilidad que el clima corresponda al señalado por el estudio es 80% y 10% a cualquiera de los dos restantes. Por ejemplo, la probabilidad que el clima sea Seco dado que el estudio pronosticó Clima Seco es 80%, y la probabilidad que el clima sea Seco dado que el estudio pronosticó clima Normal es 10%.

Con esta información se desea determinar el máximo valor que el agricultor está dispuesto a pagar por el estudio. La resolución del problema se presenta en la Figura 1.7.

La rama del árbol correspondiente a la situación "Sin Estudio" no se ha detallado, pues es la misma que la presentada en la Figura 1.1. El primer paso para resolver el problema es determinar la probabilidad de obtener cada uno de los pronósticos en el estudio. La información que poseemos respecto a la confiabilidad del estudio, sumada a que sabemos que las probabilidades de ocurrencia del Clima Seco, Normal y Lluvioso en la realidad son 0.25, 0.5 y 0.25 respectivamente, nos permite determinar (aplicando probabilidades totales) que la probabilidad que el estudio pronostique Clima Seco es 3/14, la probabilidad de obtener un pronóstico de Clima Normal es de 8/14 y con probabilidad 3/14 el pronóstico será de Clima Lluvioso. Se debe notar que, en las ramas que salen de los nodos aleatorios, las probabilidades asociadas son las condicionales en el resultado del estudio.

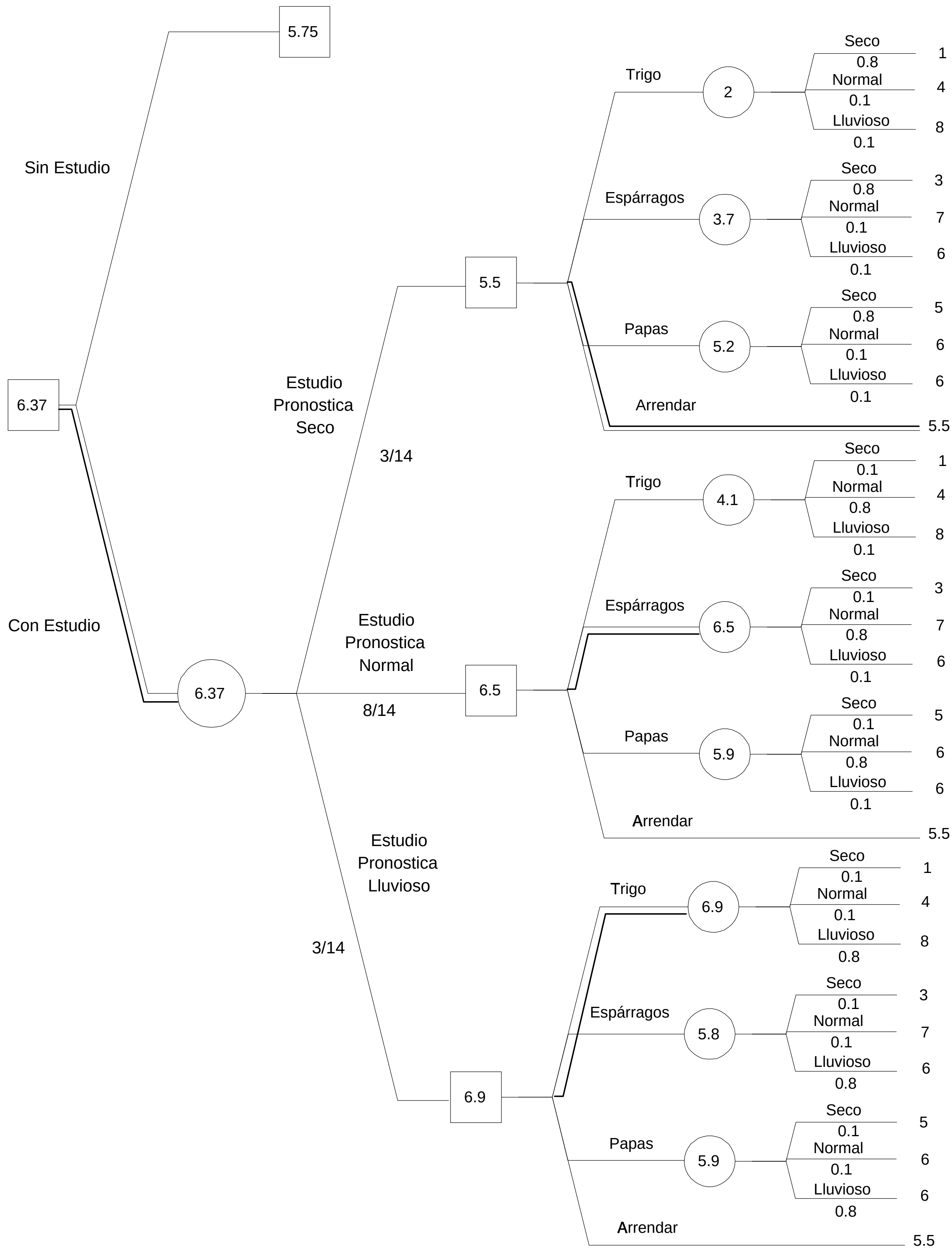
Del árbol es posible calcular el valor del estudio (el mayor valor que el agricultor estaría dispuesto a pagar por él) como

$$\text{Valor del Estudio} = \$\ 6.37 \text{ - } \$\ 5.75 = \$\ 0.62$$

La solución presentada gráficamente en el árbol debe leerse como sigue: "Realizar el estudio Climático. Si el pronóstico obtenido es de Clima Seco, arrendar el terreno; si el pronóstico es Clima Normal, cultivar espárragos; si el estudio pronostica Clima Lluvioso, cultivar Trigo".

A modo de ejercicio, verifique que el agricultor estaría dispuesto a pagar \$ 1.125 por un estudio climático que arrojara información perfecta (i.e. un estudio que predice exactamente lo que ocurrirá con el clima).

Figura 1.7: El problema del Agricultor con Estudio Climático



1.5 Ejercicios

1. Una empresa está evaluando la posibilidad de lanzar un nuevo producto al mercado. Para ello dispone de tres alternativas:

   - Realizar un test de mercado y decidir si lanzar o no el producto en función de los resultados del estudio.
   - Lanzar el producto inmediatamente.
   - No lanzar el producto al mercado.

   En ausencia del estudio, la empresa estima que con un 55% de probabilidad el lanzamiento del nuevo producto será exitoso. Si el producto es exitoso la empresa obtendrá utilidades por \$ 300.000, pero si fracasa el producto se obtendrán pérdidas por \$ 100.000.

   El costo de realizar el estudio es de \$ 30.000, y tiene 60% de probabilidad de entregar resultados favorables y 40% de entregar resultados desfavorables. Si el estudio entrega resultados favorables, con un 85% de probabilidad el producto será exitoso, mientras que si el resultado del estudio es desfavorable con un 10% de probabilidad el producto será exitoso.

   Determine la estrategia a seguir por parte de la empresa. Cuál es el beneficio resultante de dicha estrategia?. Determine el valor de un estudio que entregue información perfecta sobre el éxito o fracaso del producto.

2. Un paciente entra al hospital con fuertes dolores abdominales. Basado en experiencias pasadas, el Doctor Palma cree que con 28% de probabilidad el paciente tiene apendicitis y que con 72% de probabilidad tiene algún problema menor. El Dr. Palma puede operar al paciente inmediatamente o esperar 12 horas hasta obtener los resultados del examen. En 12 horas el doctor sabrá exactamente si el paciente tiene o no apendicitis. El problema es que en 12 horas el apéndice del paciente puede perforarse (si es que tiene apendicitis), haciendo la operación mucho más riesgosa. El Dr. Palma cree que si espera las 12 horas para obtener los resultados del examen, existe un 6% de probabilidad que el paciente se encuentre con un apéndice perforado, 22% de probabilidad que el paciente se encuentre con una apendicitis normal y 72% de probabilidad que tenga un problema menor. De experiencias pasadas, el Dr. Palma ha determinado la probabilidad de muerte durante la operación dependiendo del estado del paciente, la que se muestra en la siguiente tabla:

Estado	Probabilidad
Apendicitis Normal	0.009
Apéndice Perforado	0.064
Problema Menor	0.004

   Un paciente con un problema menor que no es operado, siempre vive.

   Suponiendo que el objetivo del doctor es maximizar la probabilidad de sobrevivencia del paciente, determine la estrategia a seguir.

3. Resuelva los problemas 1 y 2 usando los criterios de MAXIMIN y de Mínimo Arrepentimiento.

4. Un exportador de manzanas tiene en estos momentos una partida cuya procedencia no conoce con exactitud. El cree, sin embargo, que con probabilidad p es del productor A y con probabilidad $1-p$ es del productor B. La partida proviene de un solo productor.

   Las manzanas pueden ser de calidades "Calidad Premium" o "Calidad Standard". Los dos productores producen ambos tipos de manzanas, habiendo en una partida tanto cajas Premium como Standard. Las manzanas no son clasificadas por los productores.

   Por experiencia se sabe que una partida de manzanas tiene la siguiente proporción de cajas de calidades Premium y Standard según sea el productor:

	PRODUCTOR	
CALIDAD	A	B
PREMIUM	0.9	0.7
STANDARD	0.1	0.3

   La partida de manzanas, actualmente en poder del exportador, puede ser exportada o vendida en el mercado nacional. Si es exportada al llegar a su destino será sometida a un control de calidad, que consiste en sacar 1 caja de la partida. Si esta caja contiene manzanas Premium, el comprador pagará US$ 1000 por la partida, y si es Standard pagará US$100. En lugar de exportar, la partida puede venderse en el mercado nacional a US$800.

   (a) Represente el problema mediante un árbol de decisión y explicite todas las probabilidades.

   (b) Cuál es el menor valor de p que hace atractivo exportar las manzanas.

   (c) Suponga que a un costo muy menor, que se puede asumir cero, el exportador puede repetir en Chile el experimento que realizará el comprador extranjero. ¿Para qué valores de p conviene hacer el experimento en Chile? Asuma que en caso de indiferencia entre hacer y no hacer el experimento, la decisión es no hacerlo, ya que siempre el experimento tiene un costo, aunque este sea muy menor.

   (d) si p=0.5. ¿Cuánto es lo máximo que el exportador está dispuesto a pagar por el experimento que se realiza en suelo nacional?

5. El ministro de Salud desea determinar si los inmigrantes al país deben ser testeados para determinar si son portadores de una enfermedad contagiosa. Asuma que la decisión es tomada en base a criterios económicos.

   Asuma que cada inmigrante que ingresa al país y tiene la enfermedad le cuesta \$100.000 y que cada inmigrante que entra al país y no tiene la enfermedad contribuye \$10.000 a la economía nacional. Asuma que 10% de todos los inmigrantes potenciales tienen la enfermedad.

El gobierno puede admitir a todos los inmigrantes, admitir ningún inmigrante o testear los inmigrantes para detectar si son portadores de la enfermedad antes de decidir si admitirlos o rechazarlos. El test cuesta \$100 por persona; el resultado del test es positivo o negativo. Si el resultado del test es positivo, la persona definitivamente tiene la enfermedad. Sin embargo, 20% de todas las personas que efectivamente tienen la enfermedad tienen un resultado negativo al hacer el test (es decir, 20% de los casos el test no detecta la enfermedad, estando presente). El test siempre resulta negativo si la persona no tiene la enfermedad.

El objetivo del gobierno es maximizar el beneficio esperado menos el costo esperado por inmigrante potencial. Determine la estrategia óptima para el gobierno.

¿Cuánto es el máximo precio que estaría dispuesto a pagar por un test médico que determinará con exactitud si la persona tiene o no la enfermedad?

Bibliografía

[1] Varian, H.R. *Microeconomic Analysis.* W.W. Norton & Co.

[2] Kreps, D. *A Course in Microeconomic Theory.* Princeton University Press.