DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

Clase Auxiliar 23 de Marzo, 2004

Problema 1

El gobierno está evaluando el realizar una campaña masiva de vacunación contra la influenza. Se sabe que el 30 % de la población ya tiene anticuerpos y por lo tanto independientemente si se vacuna o no, no contraerá la enfermedad. El 70 % restante no tiene anticuerpos y se sabe que con una probabilidad de 0.5 contraerá la enfermedad. El costo social percibido por el gobierno, por persona que contrae la enfermedad es de $100 (tratamiento, horas de trabajo perdidas, etc.). Si una persona se vacuna la probabilidad que se enferme es cero.

1. ¿Cuál es el precio máximo que el gobierno estaría dispuesto a pagar por la vacuna de manera que la mejor opción sea vacunar a toda la población (independientemente de si tiene o no anticuerpos)?.

Se sabe que el precio de la vacuna es de $40. Además de las opciones de no vacunar o vacunar a toda la población, al gobierno se le ha presentado una nueva alternativa: el laboratorio que distribuye la vacuna puede hacer un test de sangre rápido justo antes de colocar la vacuna para detectar a aquellas persona que ya tienen el anticuerpo. Se sabe que con probabilidad de 0.1 el test indica que la persona no tiene el anticuerpo cuando en realidad lo tiene. Por otra parte, se sabe que cuando la persona no tiene el anticuerpo existe una probabilidad p de que el test salga positivo, es decir, el test diga que sí tiene el anticuerpo.

2. ¿para qué valores de p resulta útil realizar el test.
3. Suponga ahora que $p = 0{,}5$ ¿Cuál es su máxima disposición a pagar por el test?

Problema 2

Una deportista, pocos días antes de un importante campeonato, ha comenzado a sentir algunas molestias en su espalda. Su médico le explica que mucha gente siente dichas molestias, y que muchas veces (una fracción p de los casos) no significan nada. Sin embargo hay ocasiones (una fracción $(1-p)$ de los afectados) en que corresponden a un serio problema en el sistema nervioso. $(0 < p < 1)$.

Nuestra deportista podría someterse a un tratamiento preventivo, el cual, tenga o no el problema, la dejará sana. Sin embargo para realizar el tratamiento tendría que abstenerse de participar del campeonato. A esta alternativa ella le asigna una utilidad de 0 (la cual considera el disgusto por no participar del campeonato, el costo del tratamiento, etc.).

Alternativamente ella podría competir en el campeonato. El riesgo de ello radica en que, si sus molestias son efectivamente síntoma de un problema en el sistema nervioso, al terminar el campeonato estará mucho peor, y deberá realizar un tratamiento más prolongado, absteniéndose de participar en muchos otros torneos. Esa situación le reportaría una utilidad de -5000. Por otro lado, si sus molestias no significan nada, para el final del campeonato se habrán desvanecido, y el haber participado le reporta una utilidad esperada de 1000.

El objetivo de nuestra deportista es maximizar su utilidad esperada.

1. Modele el problema que enfrenta esta deportista mediante un árbol de decisión. Indique la decisión óptima y la utilidad esperada, como función de p, $B_0(p)$.

Suponga ahora que ella puede realizarse un examen, de manera de tomar una decisión más informada. Si las molestias no significan nada, el examen arrojará con seguridad un resultado negativo. Ahora, si en realidad las molestias son consecuencia de un problema en el sistema nervioso, el examen arrojará un resultado positivo con probabilidad β (y negativo con probabilidad $(1-\beta)$). Realizarse el examen le produce una desutilidad de C (tanto por el costo monetario del examen como por lo desagradable que resulta efectuarlo).

2. Modele nuevamente el problema que enfrenta la deportista mediante un árbol de decisión. Escriba la regla de decisión óptima y calcule la utilidad esperada como función de p, β y C, $B_1(p,\beta,C)$. Suponga $p > 5/6$

Suponga ahora que existen 2 exámenes distintos, ambos con características similares al del punto anterior, pero con distintos valores para los parámetros. El Examen 1 tiene una probabilidad $\beta_1 > 0$ de detectar el problema en caso que éste realmente exista, y aplicarlo produce una desutilidad $C_1 = 0$. Aplicar el Examen 2 produce una desutilidad $C_2 > 0$. Si el problema efectivamente existe el Examen 2 tiene una probabilidad $\beta_2 > 0$ de arrojar un resultado positivo, independiente de cual sea el resultado del Examen 1.

Nuestra deportista puede, en cualquier momento, decidir someterse a cualquiera de los exámenes (sin importar si ya se sometió o no al otro). Aplicar *un mismo* examen más de una vez no aporta más información, pues el resultado será siempre el mismo.

3. El Examen 1, ¿Será utilizado con seguridad?.

4. Modele nuevamente el problema que enfrenta la deportista mediante un árbol de decisión. Suponga $p > 5/6$. Para no replicar trabajo ya realizado haga (correcto) uso de la función $B_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ donde corresponda. Escriba la regla de decisión óptima como función de C_2.

Problema 3

El año 2012 el equipo A tiene que jugar la final de la Copa Libertadores contra el equipo B, con la modalidad de 2 partidos. Es decir, el equipo con más puntos después de 2 partidos gana la copa. El equipo que gana un partido obtiene 3 ptos., si empata obtiene 1, y si pierde 0.

Si después de estos 2 partidos los equipos se encuentran empatados se seguirán disputando encuentros hasta que alguno de los 2 gane y se lleve la copa.

El técnico del equipo A, antes de cada partido puede decidir jugar con un esquema ofensivo o con un esquema defensivo. Si juega con el esquema ofensivo la probabilidad de ganar es 0,45 y la de perder 0,55. Por otra parte si juega con el esquema defensivo empatará con una probabilidad 0,9 y con una probabilidad 0,1 perderá el encuentro.

1. ¿Cuál es la probabilidad que el equipo A gane la copa?. Determine y explique la estrategia óptima para este equipo.

2. ¿Cuál equipo tiene la mayor probabilidad de ganar la copa?. Explique de manera cualitativa el origen de la ventaja que tiene este equipo.