



## Auxiliar #2

### P1: Consumo y restricciones de liquidez Control 1 semestre Primavera 2003

En este problema estudiaremos como afectan las restricciones de liquidez y la existencia de sistemas de seguridad social en el bienestar de los individuos. Para ello, supondremos una economía compuesta por tres clases de individuos. Jóvenes, desde el nacimiento hasta los 20 años; Adultos, desde los 21 hasta los 60, y Viejos, desde los 61 hasta los 70, edad a la cual mueren. Cada año nace un nuevo joven y muere un viejo<sup>1</sup>.

Los individuos reciben anualmente ingresos iguales a  $Y_A$  cuando son adultos, mientras que cuando son jóvenes reciben  $Y_J = 1/4Y_A$  al año y en la vejez su ingreso es igual a  $Y_V = 1/5Y_A$  cada año.

La función de utilidad de los habitantes de esta economía viene dada por:

$$U = \sum_{t=1}^{70} \ln(c_t)$$

donde  $c_t$  representa el consumo en cada periodo. Considere para todo el problema que  $\delta = r = 0$

a) Suponga que los individuos no enfrentan restricciones de liquidez. Escriba el problema de optimización que enfrenta el individuo, incorporando la restricción presupuestaria (ésta última no es necesario deducirla) y obtenga el consumo óptimo  $c_t$  para cada periodo. Derive expresiones para el ahorro  $s_t$  a lo largo de la vida del individuo y para el ahorro agregado  $S_t$ .

*El individuo resuelve*

$$\begin{aligned} \max_{c_t} \quad & U = \sum_t \ln(c_t) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_t Y_t = \sum_t c_t \end{aligned}$$

*El Lagrangeano asociado a este problema es:*

$$\mathcal{L} = \sum_t \ln(c_t) + \lambda \left( \sum_t Y_t - \sum_t c_t \right)$$

*La condición de primer orden es*

$$\frac{1}{c_t} = \lambda$$

*es decir, el consumo es parejo a lo largo del tiempo, y se tiene  $c_t = \bar{c}$*   
*Reemplazando en la restricción presupuestaria, tenemos que*

---

<sup>1</sup>De esta forma, en la economía siempre hay 70 individuos: 20 jóvenes, 40 adultos y 10 viejos.

$$70\bar{c} = 20 \left( \frac{1}{4} Y_A \right) + 40 Y_A + 10 \left( \frac{1}{5} Y_A \right) \quad (1)$$

$$\bar{c} = \frac{47}{70} Y_A \quad (2)$$

El ahorro esta dado por  $s_t = y_t - c_t$  , luego

$$s_t = \begin{cases} -\frac{59}{140} Y_A & \text{si el individuo es joven} \\ \frac{23}{70} Y_A & \text{si el individuo es adulto} \\ -\frac{33}{70} Y_A & \text{si el individuo es viejo} \end{cases}$$

El ahorro agregado es la suma de los ahorros individuales, es decir:

$$\begin{aligned} \bar{S}^A &= 20s_J + 40s_A + 10s_V \\ &= \frac{-20 \cdot 59 + 40 \cdot 23 - 10 \cdot 33}{280} Y_A \\ &= 0 \end{aligned}$$

El resultado es razonable, por cuanto en todo momento del tiempo existe un individuo de cada edad. Luego, la economía replica el ciclo de vida del individuo y el ahorro agregado representa la cantidad de activos con que muere el individuo, la que es igual a cero.

b) Suponga ahora que durante su juventud los individuos enfrentan restricciones de liquidez, de forma tal que NO se pueden endeudar. Escriba el problema de optimización que enfrenta el individuo en este caso (note que la única diferencia con la parte anterior son las restricciones de liquidez). Calcule la trayectoria óptima de consumo  $c_t$ . Calcule el ahorro  $s_t$  a lo largo de la vida del individuo y el ahorro agregado de la economía  $S_t$ .

¿Cómo se compara con el calculado en la parte (a)?<sup>2</sup>

En este caso, para la etapa de juventud se agrega la restricción de liquidez que queda representada por  $c_t \leq Y_t$  si  $t \leq 20$ .

El problema de optimización es el mismo anterior mas esta restricción (en realidad son 20 restricciones).

El Lagrangeano en este caso es

$$\mathcal{L} = \sum_t \ln(c_t) + \lambda \left( \sum_t Y_t - \sum_t c_t \right) - \sum_{t=1}^{20} \mu_t (Y_t - c_t)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$(c_t) \quad \frac{1}{c_t} = \lambda + \mu_t \mathbb{1}_{[T_J]} \quad (3)$$

$$(\lambda) \quad \lambda \left( \sum_t Y_t - \sum_t c_t \right) = 0 \quad (4)$$

$$(\mu_t) \quad \mu_t (Y_t - c_t) = 0 \quad (5)$$

<sup>2</sup> Si tiene problemas con las matemáticas puede intuir el resultado óptimo.

De la ecuación (3) se ve que para la época adulta-veje el consumo es parejo e igual a  $\bar{c}$ . En la juventud la diferencia viene dada por el multiplicador de la restricción de liquidez. Dado esto, se puede concluir que  $\lambda > 0$  y que la restricción presupuestaria es activa.

¿Qué pasa con  $\mu$ ? Si fuera igual a cero, tendríamos de (3) que el consumo es parejo durante toda la vida, lo que viola la restricción de liquidez, porque como se mostró en (a) ello puede ocurrir sólo si el individuo se puede endeudar en su juventud. En consecuencia,

$\mu_t \neq 0$  y para que se cumpla (5) se debe tener entonces que durante la juventud  $c_t = Y_t = 1/4Y_A$ .

Para la época adulto-veje el consumo se calcula usando (3) y (4) y tomando en cuenta el hecho que los ingresos de la juventud se consumen íntegramente en esa etapa. Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{t=21}^{70} Y_t &= \sum_{t=21}^{70} \bar{C} \\ \Rightarrow \bar{C} &= \frac{40Y_A + 10\left(\frac{1}{5}Y_A\right)}{50} \\ &= \frac{42}{50}Y_A\end{aligned}$$

El ahorro será igual a cero en la juventud. En la etapa adulta será  $s_t = 8/50Y_A$  y en la vejez habrá un desahorro neto de  $32/50Y_A$ . Como se puede ver y producto de la imposibilidad de endeudarse en la juventud, el individuo cambia su patrón de consumo y ahorro, disminuyendo su consumo durante la juventud y aumentándolo durante el resto de su vida, lo que implica menos ahorro en la etapa adulta y mayor desahorro en la vejez.

El ahorro agregado es nuevamente cero, pues nuevamente la economía replica exactamente el ciclo de vida de un individuo.

c) Calcule la utilidad de los individuos en los casos (a) y (b). ¿En qué caso la utilidad es mayor? Explique su resultado.

Hint: Puede serle útil recordar que en el caso de funciones cóncavas se cumple la relación  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$

La utilidad está dada por  $\sum_t \ln(c_t)$ . Es fácil ver que  $\bar{c}$  se puede escribir como:

$$\bar{C} = \frac{T_J c_J + (T_A + T_V) \bar{C}}{T_J + (T_A + T_V)} \quad (6)$$

definiendo

$$\alpha = \frac{T_J}{T_J + T_A + T_V} \quad (7)$$

se llega a que

$$\bar{C} = \alpha c_J + (1-\alpha) \bar{C} \quad (8)$$

Luego, si definimos  $U_a$  y  $U_b$  a las utilidades de las partes (a) y (b) tenemos que la diferencia entre ambos casos es:

$$U_a - U_b = 70 \ln(\bar{C}) - 20 \ln(c_J) - 50 \ln(\bar{C}) \quad (9)$$

dividiendo todo por 70 tenemos

$$\Delta(\tilde{U}) = \ln \left( \alpha c_J + (1 - \alpha) \bar{C} \right) - \left( \alpha \ln(c_J) + (1 - \alpha) \ln(\bar{C}) \right) \quad (10)$$

usando la propiedad de concavidad del logaritmo, tenemos que

$$\ln \left( \alpha c_J + (1 - \alpha) \bar{C} \right) > \left( \alpha \ln(c_J) + (1 - \alpha) \ln(\bar{C}) \right) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \Delta(U) > 0 \quad (12)$$

*Es decir, la utilidad es mayor en el caso sin restricciones de liquidez, lo que es obvio por cuanto en ese caso el individuo puede suavizar totalmente su consumo.*

d) Discuta qué sucede con el ahorro agregado en el caso en que la población crece a una tasa de  $n\%$  anual<sup>3</sup>, tanto en el caso en que no hay restricción de liquidez como en el caso en que las hay. ¿Están mejor los individuos cuando la economía tiene mayor capacidad de ahorro?

*En el caso en que hay crecimiento de población, cada año estarán naciendo más jóvenes. Luego, la proporción de jóvenes en la economía crece respecto a la de adultos y la de adultos crece respecto a la de los viejos.*

*En el caso sin restricciones de liquidez, al haber más jóvenes hay un aumento en el endeudamiento neto de la población joven a costa de su futuro. Es decir, el ahorro agregado pasa a ser negativo. A medida que pasen los años habrá cada vez una proporción mayor de jóvenes, por lo que el endeudamiento neto será creciente en el tiempo.*

*En el caso con restricciones de liquidez, como los jóvenes no se pueden endeudar y los adultos ahorran, el ahorro neto será mayor puesto que siempre habrá más personas ahorrando que en el caso anterior. Nuevamente, a medida que avance el tiempo habrá cada vez más jóvenes en relación a los adultos y más adultos en relación a los viejos. De esta forma, habrá cada vez una mayor proporción de ahorrantes netos, lo que haría que el ahorro agregado aumente.*

*Como se ve, pese a que en el segundo caso la economía tiene un ahorro agregado mayor que en el caso sin restricciones, de (c) sabemos que sus individuos tienen un bienestar menor. Luego, no siempre va a ser mejor tener más ahorro.*

e) Suponga ahora que los individuos no tienen restricciones de liquidez pero se ven forzados a pagar un impuesto de suma alzada  $\tau = 1/6Y_A$  durante su juventud y adultez, el cual es devuelto íntegramente en forma de transferencia al llegar a la vejez. Calcule nuevamente las trayectorias de ahorro y consumo.

¿Tiene algún efecto sobre la conducta del individuo este mecanismo de seguridad social? ¿En qué casos se podría justificar la existencia de mecanismos de seguridad social?

*El individuo va a percibir que en su juventud y adultez sus ingresos disminuyen en  $\tau = 1/6Y_A$ , mientras que al iniciar la vejez recibirá como transferencia  $60\tau = 10Y_A$ . (también es correcto si se supone que la transferencia es año a año en la vejez, en tal caso sería de  $Y_A$  cada año).*

*Como no hay restricciones de liquidez y los impuestos cobrados igualan a la transferencia recibida, el problema -en consumo- que resuelve el individuo es idéntico al de la parte (a). Lo que cambia en este caso es el patrón de ahorro. Dado que*

<sup>3</sup> Es decir, si en el año  $t$  nacen  $P_t$  personas, entonces en  $t + 1$  nacen  $P_{t+1} = (1 + n)P_t$ .

*durante la juventud recibe menos dinero, tendrá que endeudarse más. En efecto, su endeudamiento será igual a  $s_J = 247/420Y_A$ . Durante la adultez ahorrará menos ( $s_A = 34/210Y_A$ ) y durante la vejez tendrá un ahorro neto promedio igual a  $s_V = 37/70$  (si se considera que recibe  $Y_A$  cada año).*

*Como se ve, el mecanismo de seguridad social no tiene ninguna importancia sobre la trayectoria de consumo. La razón es que el individuo ajusta su trayectoria de ahorro de forma de mantener el patrón de consumo óptimo.*

*En resumen, no hay ningún efecto de incorporar seguridad social. Sin embargo, estas políticas pueden ser buenas en caso que los agentes sean miopes y no planifiquen bien su ciclo de vida. De esta forma se resguarda el bienestar de tales individuos. Otro caso en que es útil es cuando existen agentes que resuelven su trayectoria considerando que el gobierno no los va a dejar morir sin nada. En tal caso, las personas consumirían todo antes de morir y exigirían al estado que los mantenga de alguna manera. Mediante el sistema de seguridad se previene la aparición de ese comportamiento oportunista.*