

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 29 de mayo de 2004

Índice general

VII. RELATIVIDAD ESPECIAL	3
VII.1. Introducción	3
VII.1.1.Sinopsis del origen y resultados de la relatividad especial .	9
VII.1.2.La medición del tiempo	9
VII.1.3.Las ecuaciones de Maxwell	12
VII.1.4.El principio de relatividad de Galileo	14
VII.2. Postulados de la Relatividad Especial	18
VII.2.1. Diagramas Espacio–Tiempo	18
VII.2.2. Postulados de la Relatividad Especial	21
VII.3. Simultaneidad	25
VII.3.1. Simultaneidad Absoluta	26
VII.3.2. Simultaneidad relativa (La velocidad de la luz es finita)	27
VII.3.3. La velocidad de la luz y la simultaneidad relativa	31
VII.4. El Método de Bondi	33
VII.4.1. El Efecto Doppler	33
VII.4.2. La función k	33
VII.4.3. Dilatación del Tiempo	37
VII.4.4. El tiempo transcurrido depende de la trayectoria	39
VII.4.5. La contracción del largo de una barra	41

VII.4.6.	Las transformaciones de Lorentz.	44
VII.4.7.	El retorno de lo absoluto, los invariantes.	50
VII.4.8.	Composición de velocidades	52
VII.4.9.	Suma de velocidades	53
VII.5.	Dinámica Relativista.	60
VII.5.1.	La Cuadrivelocidad.	61
VII.5.2.	El cuádrimomentum	66
VII.5.3.	La Conservación del Momentum.	67
VII.5.4.	Ley de Transformaciones de Vectores.	76
VII.5.5.	Principio Variacional.	80
VII.6.	Confirmación experimental de la relatividad especial	82
VII.6.1.	Resumen	87
VII.6.2.	Transformación de un elemento de 4-Volumen	88
VII.6.3.	Las Ecuaciones de Maxwell	90
VII.7.	Ejercicios Propuestos	93

Índice de cuadros

[12pt]book times [spanish]babel [pdftex]graphicx wrapfig

Índice general

Apuntes de Relatividad Especial Nelson Zamorano Escuela de Verano, Enero
2003, version 1 revisado: Enero 2003

Capítulo VII

RELATIVIDAD ESPECIAL

VII.1. Introducción

La relatividad especial, de acuerdo al libro de Sir E. Whittaker: *A History of the theories of Aether and Electricity*, fue introducida por H. Poincaré, H. A. Lorentz, G. F. FitzGerald, y puesta en la forma final por A. Einstein en 1905.

Una breve referencia a la vida de Einstein aparece en el documento escrito por J. A. Wheeler, quien conoció y trabajó con Einstein en sus años en Princeton¹.

Einstein tenía una especial preocupación por entender el origen y naturaleza del tiempo. Una pregunta que lo fascinaba era: ¿cómo aparecería el universo para un observador que viaja en un rayo de luz? estas preocupaciones unidas a sus sólidos conocimientos de física y matemática, su genialidad y persistencia² le permitieron dar una forma definitiva a la teoría de la relatividad especial. Einstein postuló que la luz adquiere la misma velocidad en cualquier sistema de referencia inercial. Éste es el principio más revolucionario en su teoría. Genera dos consecuencias inmediatas.

Como existen infinitos sistemas inerciales, cada uno moviéndose con una velocidad relativa constante con respecto a otro³ este principio afecta directamente al principio de superposición de velocidades en la forma establecida en el movimien-

¹www.escuela.de.verano/fisica/index.html , ver relatividad especial

²Cuando Einstein inventó la relatividad especial, no tenía un cargo en una universidad.

³Ver Capítulo IV, acerca de la validez de las Leyes de Newton.

to relativo de la cinemática newtoniana. Establece también el carácter relativo de la idea de simultaneidad. Esto es: dos hechos ⁴ que ocurren simultáneamente en el sistema de referencia de un observador inercial no ocurren así para otro observador en movimiento relativo con respecto al anterior. Para este último, uno de los hechos mencionados ocurre antes que el otro.

En la relatividad especial, la idea de simultaneidad para dos hechos estará asociada directamente al observador inercial que así lo estableció. Para otro observador inercial, en movimiento relativo con respecto al anterior, estos dos hechos no ocurren en forma simultánea.

También como consecuencia de adoptar la velocidad de la luz como una constante universal, desaparece la necesidad de especificar un medio que soporte las oscilaciones de la luz, considerada como una onda electromagnética propagándose. Este medio, denominado éter, sostiene las oscilaciones de las ondas electromagnéticas. Junto con el éter desaparece la posibilidad de elaborar acerca de un sistema de referencia en reposo absoluto.

La genialidad de Einstein fue abandonar la idea de un espacio y un tiempo absoluto y establecer la idea de una unidad espacio-tiempo, construido por cada observador inercial en base a los principios de la relatividad especial. Este espacio-tiempo constituye el andamiaje de cada observador inercial. Las mediciones del largo de una vara o el largo de un intervalo son también propias de cada observador, relativas al observador que realiza las mediciones. En este esquema, la velocidad de la luz es un elemento básico, puesto que es universal, el mismo para todos los observadores inerciales.

El valor de la velocidad de la luz es tan grande comparado con cualquier otra velocidad, que es muy difícil detectar las consecuencias de estos postulados en la vida diaria.

El siguiente ejemplo ilustra una situación que no corresponde a lo que estamos habituados y que sucedería si existieran objetos *macroscópicos* que viajaran a velocidades cercanas a las de propagación de la luz. O, que sucederían en caso que la velocidad de la luz tuviera un valor cercano a los que se observan en la vida diaria.

Nuestra experiencia indica que si un helicóptero se acerca a una muralla iluminándola con un foco, como se ilustra en la Figura, la zona iluminada se acerca

⁴Más adelante, definiremos evento que reemplazará lo que denominaremos aquí como "hechos"

desde infinito hacia la muralla. Mostraremos en este ejemplo, que es posible que el movimiento de la sombra proyectada por una muralla debido al foco en movimiento, puede desplazarse desde la muralla hacia infinito, si el foco (o el helicóptero) se acercara a velocidades cercanas (pero inferiores) a la velocidad de la luz.

Ejemplo

Un avión viaja en forma rectilínea a una velocidad u , cercana a la velocidad de la luz y a una altura H sobre el suelo. Una linterna, encendida al pasar el avión, emite un rayo de luz pasando apenas sobre el muro.

Dos observadores A y B en reposo, descansan detrás del muro de altura h . B se ubica justo detrás del muro, mientras que A permanece a una distancia ℓ de B .

Al pasar sobre la muralla (punto D , en la figura) el avión enciende otra linterna que ilumina al observador B . En este ejemplo, nos interesa solo estas dos linternas, la situada en el punto P y apuntando sobre el borde superior de la muralla y la situada en el punto D , justo sobre la muralla y apuntando en forma vertical sobre B .

a) Encuentre el valor que debe tomar la velocidad u del avión de modo que el destello (fotón) emitido desde la linterna en P , al ser encendida por el paso del avión, alcance al observador A justo en el instante en que el fotón, emitido desde la linterna situada en el punto D , alcanza al observador B .

Hallar el rango de valores del ángulo ϕ para el cual ocurre esta situación.

b) Demuestre que si la velocidad del avión es mayor que el valor encontrado en la pregunta anterior (pero siempre menor que la velocidad de la luz), entonces la oscuridad que hay en el lado izquierdo del muro se recoge desde B , al lado de la muralla hacia A . Justo lo opuesto a lo que dicta el sentido común.

Este es un ejercicio de cinemática no-relativista.

Solución

a) Para encontrar el valor buscado para u , calcularemos el tiempo que tarda el rayo de luz en recorrer los dos caminos propuestos en el enunciado (ver Figura):

$$T(P \rightarrow C \rightarrow A) \equiv T_A,$$

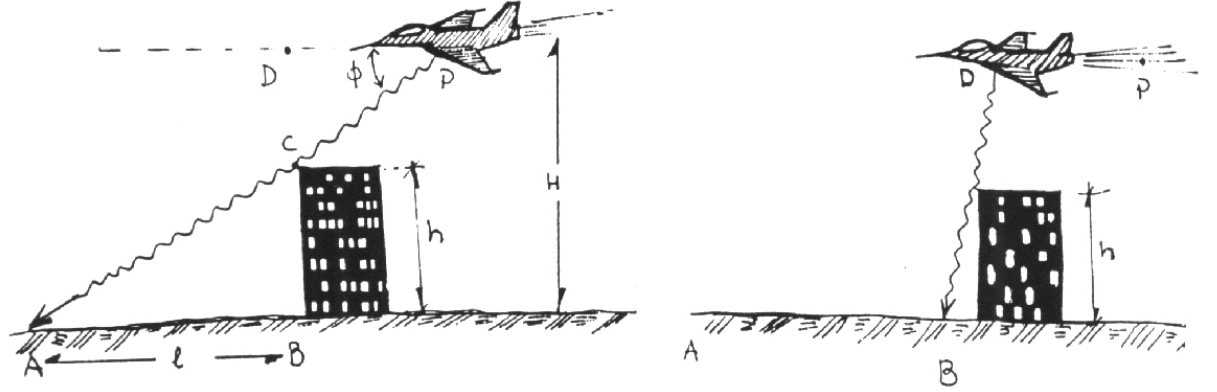


Figura VII.1: Al pasar por los puntos **P** y **D** el avión enciende una linterna ubicada en cada uno de dichos puntos y que apunta en la forma indicada.

$$T(P \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B) \equiv T_B.$$

Calculemos T_A .

Como los triángulos rectángulos $\triangle CDP \sim \triangle CBA$, entonces

$$\frac{\bar{AP}}{\bar{AC}} = \frac{H}{h}, \quad \text{de aquí se obtiene} \quad \bar{AP} = \frac{H}{h} \bar{AC} = \frac{H}{h} \sqrt{\ell^2 + h^2},$$

donde hemos usado $\bar{CA} = \sqrt{h^2 + \ell^2}$.

Pero T_A es el tiempo que el fotón demora en recorrer la distancia \bar{PA} , de modo que:

$$T_A = \frac{H}{h} \sqrt{h^2 + \ell^2} \cdot \frac{1}{c}. \quad (\text{VII.1})$$

Para calcular la velocidad u de modo que el destello emitido en D llegue a B simultáneamente con el fotón que salió desde P y alcanza A , debo considerar el tramo PD que recorrió el avión.

$$T_B = T(P \rightarrow D) + T(D \rightarrow C \rightarrow B).$$

El tiempo que transcurrió entre $P \rightarrow D$ es

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\bar{PD}}{u}.$$

De la Figura se tiene:

$$\frac{\bar{PD}}{\bar{DC}} = \frac{\ell}{h},$$

de modo que

$$\bar{PD} = \frac{\ell}{h} \bar{DC} = \frac{\ell}{h} (H - h), \quad (\text{VII.2})$$

de esta forma

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\ell (H - h)}{h u}.$$

El tiempo de viaje del destello entre D y B es:

$$T(D \rightarrow B) = \frac{H}{c}$$

de donde se puede obtener el tiempo que tarda el rayo en alcanzar el punto B, contando el instante desde que el avión encendió la linterna en el punto P:

$$T_B \equiv T(P \rightarrow B) = \frac{\ell (H - h)}{h u} + \frac{H}{c}.$$

Si imponemos la condición que A y B reciban los destellos simultáneamente, se debe cumplir que $T_A = T_B$, y de esta ecuación obtenemos la condición buscada:

$$\frac{\ell (H - h)}{h u} + \frac{H}{c} = \frac{H}{c} \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2}}{h},$$

despejando u/c , obtenemos:

$$\frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} - \frac{h}{\ell}}$$

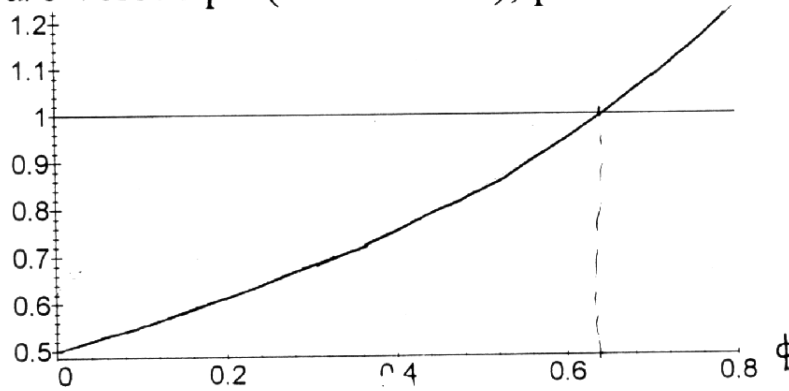
$$\text{como } \frac{h}{\ell} \equiv \tan \phi, \quad \text{entonces: } \frac{u}{c} = \frac{(1 - \frac{h}{H})}{\left[\frac{1}{\cos \phi} - \tan \phi \right]}. \quad (\text{VII.3})$$

El ángulo ϕ debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{u}{c} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} > (1 - \frac{h}{H}).$$

En el gráfico que se acompaña se puede estimar el rango de valores posibles que puede tomar ϕ .

u/c versus ϕ (en radianes), para $h/H=0.5$



b) Es claro que si la velocidad del avión u aumenta, entonces el destello emitido en P , llega a A después que el emitido desde C , puesto que el avión viaja más rápido y el tiempo T_{PD} se acorta.

Si el avión viaja con una velocidad $u = u(\phi)$ que se ajusta a la ecuación VII.3, la región \bar{AB} se ilumina en forma instantánea.

Si

$$1 > \frac{u}{c} > \left(\frac{1 - \frac{h}{H}}{1 - \sin \phi} \right) \cos \phi.$$

entonces la zona \bar{AB} se ilumina desde B hacia A , siempre que no emita destellos cuando $\phi < 0,6$. Para $\phi > 0,6$ no se cumple que $\frac{u}{c} < 1$.

VII.1.1. Sinopsis del origen y resultados de la relatividad especial

La mecánica newtoniana supone la existencia de un tiempo y un espacio absoluto, rígido, inamovible y, en consecuencia el mismo para todos los observadores.

Este esquema resalta claramente cuando uno resuelve problemas de mecánica. Está en los supuestos. Nadie ha registrado un acortamiento en el largo de una barra en movimiento o un desajuste en el reloj de un viajero internacional a su regreso.

La falta de evidencias de este tipo en la vida diaria, se debe a que la magnitud de la velocidad de la luz, $\approx 300,000$ km/s, supera ampliamente cualquier velocidad cotidiana. Por esta razón algunos de los ejercicios propuestos son más bien *experimentos pensados* que realidades. Sin embargo, las predicciones de la relatividad especial han sido verificadas en todos los experimentos realizados hasta el presente.

Uno de los postulados de la relatividad especial afirma que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales. Este principio genera cambios profundos en la concepción del tiempo y del espacio. Para aceptarlos es necesario su verificación experimental. En esta tarea juega un papel central la precisión alcanzada en la medición del tiempo. Por esta razón, antes de adentrarnos en los postulados de la relatividad especial, haremos una reseña del paulatino incremento en la precisión con que se registra el tiempo. En la actualidad, esta es la variable que se puede medir con mayor precisión.

VII.1.2. La medición del tiempo

El tiempo se define en forma tal que la descripción del movimiento resulte simple [2]. De hecho, uno de los logros de Galileo en 1583, fue el convertir un péndulo en una máquina confiable para registrar el paso del tiempo. Como lo señala Penrose [3], los griegos lograron un entendimiento aceptable de los fenómenos estáticos, pero no así de los dinámicos. Este hecho proviene, en parte, por la falta de una forma adecuada de cuantificar el cambio de posición de un objeto. Otro de los aciertos de Galileo fue utilizar un reloj de agua para tabular el tiempo durante la caída libre de los cuerpos. Éste fue también el origen de la utilización de planos inclinados y poleas, que surgieron como una forma de hacer la caída libre más lenta y por tanto más fácil de tabular. Es también, el origen de los ejercicios

propuestos en los libros introductorios de mecánica.

En este contexto podemos mencionar a Hooke, quien alrededor del siglo XVII reemplazó el reloj de péndulo que utilizaban los barcos por uno con un resorte helicoidal. De este modo se aminoraba el efecto de los vaivenes del barco sobre el funcionamiento del reloj. Otro relojero John Harrison (1693–1776) utilizó un resorte bimetálico para disminuir los efectos debido a los cambios de temperatura y logró construir un reloj que sólo se atrasaba 54 segundos después de una travesía marítima de 156 días [5].

El más antiguo de los relojes lo constituye el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. A medida que aumentó la precisión de los instrumentos utilizados, comenzaron a surgir dificultades debido a que la tierra describe una elipse alrededor del sol y, por la conservación del momento angular, hay tramos en los cuales viaja más rápido (ver Figura) y el día solar, considerado como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones consecutivas del sol en el cenit de un mismo lugar, se alarga en aproximadamente 4,7 segundos con respecto al día promedio.

¿Es posible detectar estos cambios?



Figura VII.2: Este es un diagrama muy exagerado de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La órbita de la Tierra es muy cercana a una circunferencia. Se encuentra más cerca del Sol durante el verano del hemisferio Sur.

En 1900 los relojes se ajustaban de acuerdo al tránsito de las estrellas más luminosas a través de los meridianos de los observatorios terrestres. Esto se define como un día sideral.

En 1936 la construcción de relojes de péndulo era técnicamente tan sofisticada que en el instituto BIH (Bureau International de l'Heure) se logró alcanzar una precisión suficiente para poder comparar la duración del día en dos fechas diferentes y asegurar que el largo de un día de Enero de dicho año excedió a uno de

Julio en aproximadamente 2 milisegundos [9].

En 1955 la precisión de los relojes atómicos permitían medir el tiempo con una exactitud de una parte en 10^{11} y su tamaño y peso permitían hacer comparaciones entre puntos alejados uno del otro.

Hoy, la precisión y estabilidad de los relojes nucleares ⁵ permite una exactitud en su medida de 2 partes en 10^{14} .

Escalas de tiempo

El *tiempo solar medio* es la escala de tiempo obtenida mediante la posición aparente del Sol, después de aplicar diversas correcciones para lograr una escala más uniforme.

El *tiempo universal* UTO, es el tiempo solar medio referido al meridiano de Greenwich (Greenwich Mean Time o GMT).

Pequeñas correcciones adicionales de la uniformidad del movimiento de la Tierra debido a fluctuaciones en la dirección del eje polar y otros movimientos periódicos asociados a la atmósfera, las corrientes oceánicas, ...etc. lleva a otras escalas aún más uniformes: UT1 y UT2.

Numerosos laboratorios han cooperado para generar lo que se denomina *el tiempo coordinado universal* (UTC), que es un promedio de las escalas de tiempo atómico de cada uno de los laboratorios. Para mantener la equivalencia entre el UTC y el largo del día, es necesario añadir o quitar, en forma ocasional, un segundo a la escala atómica. Este es el *segundo bisiesto* que se menciona en el recorte de un periódico que se acompaña.

⁵El segundo se define de la siguiente forma: un átomo de Cesio 133, que al sufrir una transición (hiperfina) entre dos estados posibles, emite una onda; 9.192.631.770 ciclos (oscilaciones) de esta onda, corresponden a un segundo. Esta definición da una idea de la tecnología involucrada en el proceso de medición.

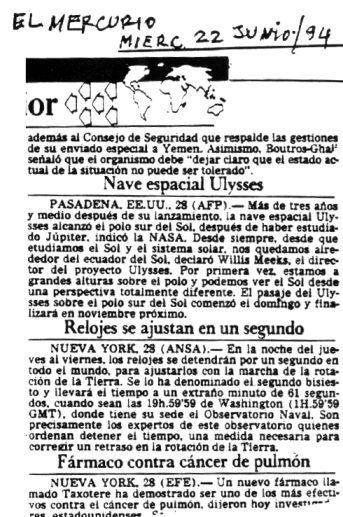


Figura VII.3: .

Por un acuerdo internacional, la UTC es mantenida en coincidencia con la escala del navegante UT1, dentro de un margen de 0.7 segundos.

VII.1.3. Las ecuaciones de Maxwell

A fines del siglo pasado existían dos teorías que habían demostrado, a través de numerosos experimentos, constituir un buen modelo de la naturaleza. Estas eran, la teoría elaborada por J. C. Maxwell acerca de la electricidad y magnetismo de los cuerpos (que llamaremos ecuaciones de Maxwell) y la teoría mecanicista de Newton. James Clerk Maxwell (1831 – 1879) unificó los diversos experimentos relacionados con cargas eléctricas, corrientes, bobinas...etc., realizados hasta esa época en un conjunto de ecuaciones que llevan su nombre. Esta unificación se logró incorporando un término extra en una de las ecuaciones que, no contradecía ninguno de los experimentos conocidos y que añadía una mayor belleza –o simetría–, a las ecuaciones. Este término dio origen a una ecuación de onda cuya velocidad de propagación en el vacío era igual a la velocidad de la luz. A raíz de estos resultados, Maxwell postuló, por primera vez, que la luz, era una onda electromagnética. Éstas ondas fueron encontradas experimentalmente por Heinrich Hertz en 1888, cuando Maxwell había muerto.

Como sabemos, las ecuaciones de Newton toman la misma forma en todos los sistemas inerciales.

Sin embargo, estas mismas transformaciones al extender su rango de validez a las ecuaciones de Maxwell generaban problemas. Al realizar una transformación de coordenadas de la forma (VII.4), las ecuaciones de Maxwell toman una forma totalmente diferente en el nuevo sistema de referencia. Si se acepta esta situación como correcta, se deduce entonces que existe un método para identificar un sistema de referencia en reposo absoluto. Es aquel donde las ecuaciones de Maxwell toman la forma más simple. Se postuló que este medio en reposo absoluto era el éter.

Por otra parte, si la luz es una onda, el criterio mecanicista obliga a pensar en un medio sobre el cual se propaga esta onda. Más aún, de acuerdo a la composición de velocidades introducida por Galileo, si la velocidad con que viaja un destello de luz en nuestra sala es c , la velocidad de este mismo destello, medida por un observador que se desplaza con una velocidad v con respecto a la sala debería ser: $c = c \pm v$, dependiendo del sentido de la rapidez del observador.

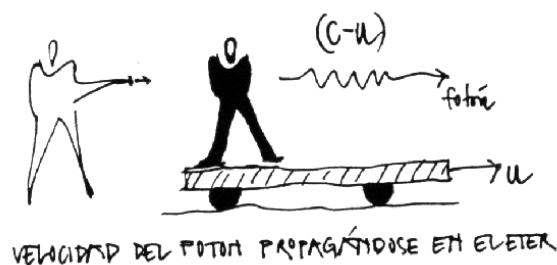


Figura VII.4: Un destello (o fotón) lanzado por un observador en reposo en el laboratorio debería tener una velocidad $(c - u)$ en el sistema de referencia de un observador que se aleja del anterior con una velocidad u .

Si las ecuaciones de Maxwell cambian de forma al ir de un sistema de referencia a otro, podemos pensar que se propagan con una velocidad constante en el sistema en reposo absoluto. Este es el *éter* mencionado anteriormente.

La influencia histórica de las ondas mecánicas en cuerdas y otros ejemplos, impulsó a los estudiosos de la época a postular la existencia de este medio etéreo, que servía de medio de transmisión para las ondas electromagnéticas y a la luz en particular.

Obviamente, este medio no se podía detectar mediante ningún experimento físico. La teoría de Einstein desechó la idea de la existencia del éter y adoptó el principio que la velocidad de la luz en el vacío era una constante universal, toma el mismo valor en todos los sistemas inerciales de referencia.

Hubo varios experimentos que indicaban que esta composición de velocidades no correspondía a lo observado. Uno de estos experimentos fue el de Michelson-Morley, quien, utilizando un dispositivo óptico, intentó detectar alguna diferencia en el valor de la velocidad de la luz, dependiendo de la dirección y sentido en que viajaba con respecto a la velocidad orbital de la Tierra. El resultado fue negativo: no se encontró evidencia, dentro del margen de error del experimento, de una superposición de velocidades del tipo utilizado en la mecánica Newtoniana.

Esto es importante, puesto que de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, la luz es una onda electromagnética, de este modo si la luz no discrimina entre dos sistemas inerciales en movimiento relativo, tampoco lo deben hacer las ecuaciones de Maxwell.

Este problema fue resuelto por H.A. Lorentz quien inventó una transformación para ir de un sistema inercial a otro que dejaba a las ecuaciones de Maxwell invariantes, es decir sin cambiar de forma. Estas son las transformaciones de Lorentz, las mismas que A. Einstein re-descubrió más tarde.

Por qué Lorentz no es, entonces, el inventor de la relatividad? simple, no supo interpretarlos correctamente. De acuerdo a su interpretación, una barra en movimiento efectivamente se acortaba con respecto a una en reposo. Se realizaron varios experimentos, muy ingeniosos, sin ningún resultado. Las barras **no** se acortaban. Qué fallaba en la interpretación de Lorentz? No se pudo desligar de la idea de tiempo absoluto. Se necesitaba una teoría más revolucionaria. La propuesta por Einstein.

Las transformaciones de Lorentz serán estudiadas más tarde. En el límite, cuando v la velocidad relativa de un sistema inercial con respecto, es pequeña comparada con la velocidad de la luz c , $v/c \ll 1$, las transformaciones de Lorentz se transforman en las transformaciones de Galileo, válidas para las ecuaciones de Newton.

Es notable que las ecuaciones de Maxwell permanecieran sin cambios al introducir las transformaciones de Lorentz para ir de un sistema inercial a otro. Las ecuaciones de Maxwell son relativistas y fueron inventadas antes que se hiciera presente la relatividad especial.

Las ecuaciones de Newton, sin embargo, necesitan ser modificados tanto en su forma como en su concepto. Es preciso abandonar la idea de tiempo absoluto, que está incrustado firmemente en las ecuaciones de Newton y en las transformaciones de Galileo.

Por esta razón, entre otras, revisaremos la relatividad de Galileo.

VII.1.4. El principio de relatividad de Galileo

La primera Ley de Newton es la definición de un sistema inercial. Si un cuerpo permanece en reposo (o en movimiento uniforme), lo podemos considerar como un sistema de referencia inercial. Una vez definido necesitamos un protocolo para relacionar las observaciones desde un sistema inercial a otro, de forma que las leyes de Newton sean las mismas en ambos. Éste es el *principio de relatividad de Galileo*.

Establece que *localmente*, no existe un experimento que permita a un observador distinguir entre un movimiento uniforme rectilíneo y el reposo.

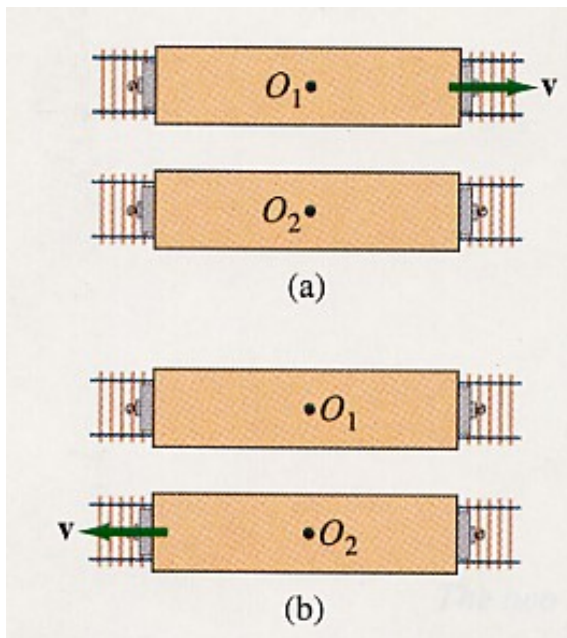


Figura VII.5: Dos individuos en trenes con una velocidad relativa V , no pueden decidir, cuál de ellos se encuentra en reposo absoluto y cual en movimiento.

De hecho, como señala Penrose [3], Galileo fue particularmente claro en este punto, más aún que Newton mismo, dando incluso un ejemplo concreto.

Considere la caída libre de un objeto, observada por dos sujetos, uno en tierra y otro en un carro en movimiento, como aparece en la Figura. La palabra *localmente* indica que a partir del resultado del experimento, cada observador opina que permanece en estado de reposo absoluto y es el otro observador quien está en movimiento.

$$\begin{array}{c} \text{Transformación} \\ \text{de} \\ \text{Galileo} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + v_0 \cdot t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{array} \right. \quad (\text{VII.4})$$

Podemos ilustrar esta idea con el siguiente experimento pensado. Supongamos dos observadores viajando en el espacio vacío –sin estrellas o galaxias a su alrededor que les sirvan de referencia– con una velocidad relativa v_0 . Como ambos observadores no sienten ninguna fuerza extraña, suponen que su sistema se encuentra en reposo absoluto y le adscriben a cada punto del espacio una coordenada. Totalmente ignorantes del principio de relatividad de Galileo, cada uno de ellos supone que los puntos espaciales están en reposo absoluto en su nave y por lo tanto *en cada instante son los mismos puntos*. Esta es la opinión del observador A. En la otra nave, el observador B hace un análisis similar y concluye que es el espacio tridimensional de *su* nave el que permanece quieto y que, obviamente, los puntos del espacio tridimensional del otro sistema de referencia, van cambiando en el tiempo.

Formalmente, cada punto en el espacio no es el mismo siempre. Debemos añadir una coordenada más que especifique el tiempo en que se determina las coordenadas.

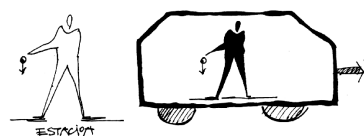


Figura VII.6: .

En las transformaciones de Galileo el tiempo es absoluto, el mismo para todos los observadores inerciales. Como hemos señalado, esto marca el quiebre con el hecho que la velocidad de la luz es una constante en todos los sistemas inerciales. La solución a este problema es la relatividad especial con sus nuevos postulados. Uno de ellos implica que el tiempo es, efectivamente, relativo.

En uno de sus postulados, el más fuerte, Einstein afirma que la velocidad de la luz es una constante universal, independiente de la velocidad de la fuente que la

genera y la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.

Otro de los postulados afirma que no es posible distinguir, mediante un experimento físico, entre dos sistemas inerciales.

Estos postulados conforman la aproximación que nosotros adoptaremos en estas notas. Para respetar el enunciado de estos principios fue necesario derribar el dogma del tiempo absoluto.

Otra consecuencia de estos postulados es el concepto de simultaneidad. Éste se establece para cada sistema inercial en forma separada, la simultaneidad deja de ser un concepto absoluto. Directamente asociado con este cambio en la idea de simultaneidad, aparece la necesidad de dejar claramente establecido qué se entiende por el largo de una barra. Concepto que también resulta ser relativo, sin que la barra experimente físicamente ninguna contracción o alargamiento. Esta relativización de las longitudes es una consecuencia directa de la definición cuidadosa de simultaneidad que incorporó Einstein a la física y marcó la diferencia entre la interpretación de H. A. Lorentz y A. Einstein acerca de la naturaleza del espacio y del tiempo.

En resumen, si respetamos el principio de relatividad de Galileo: todos los sistemas inerciales son equivalentes, no existe un espacio en reposo absoluto, fijo e inamovible. Sólo existe un evento caracterizado por sus coordenadas y el instante en que se determinó, y estos números están directamente asociados al observador que empleó un cierto método para establecerlos. Cada observador debe hacer la misma tarea. No hay un espacio fijo e inamovible, depende del observador. El hecho de asociar una coordenada a un objeto en cada instante, nos lleva a un espacio en cuatro dimensiones: una temporal y tres espaciales. La primera nos dice cuando realizamos la medición de las coordenadas de un determinado objeto.

De esta forma hemos introducido el espacio-tiempo, la necesidad de realizar gráficos que incluyan el tiempo en la descripción de las coordenadas.

La inclusión de la velocidad de la luz como una constante universal marca el advenimiento de la relatividad especial y las transformaciones de Galileo se convierten en la expresión de las transformaciones de Lorentz para el caso de velocidades bajas con respecto a la luz.

Las medidas realizadas por un observador inercial pueden ser relacionadas con las efectuadas en otro de los sis-

Universidad de Chile

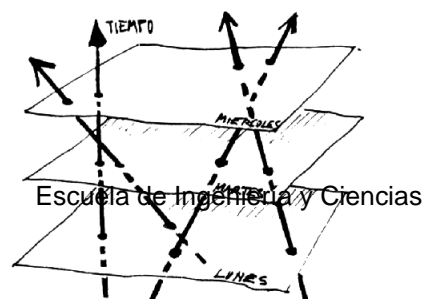


Figura VII.7: .

temas inerciales. La fórmula que los relaciona depende de las hipótesis que se asuman. Nosotros repasaremos brevemente las asumidas por Newton y que dominan toda la física pre-relativista. Posteriormente incursionaremos en una teoría más completa, con otros postulados que constituye la relatividad especial.

Newton postuló un tiempo universal, el mismo para todos los observadores inerciales. La transformación de las coordenadas espaciales obedece a la observación más elemental:

En la siguiente sección describiremos con más detalle los diagramas espacio-tiempo y posteriormente enunciaremos los postulados de la relatividad especial.

VII.2. Postulados de la Relatividad Especial

VII.2.1. Diagramas Espacio–Tiempo

Un punto en el diagrama espacio-tiempo representa un hecho concreto como el instante en que un objeto al caer toca el suelo, o un martillo golpea a un clavo... etc. Esto se denomina un *evento*. Localiza un hecho en un diagrama espacio-tiempo.

Matemáticamente está definido por un conjunto ordenado de cuatro números que corresponden al tiempo, el primero, y a las tres coordenadas espaciales, los consecutivos.

Evento : Es un tetrada ordenada de números que describen un hecho puntual. Constituye un primer paso para asignar coordenadas al espacio–tiempo.

Un evento entonces corresponde a la ceremonia que se realiza en la vida diaria para concertar una cita: se indica el lugar (las coordenadas espaciales) y la hora.

Por ejemplo una barra *no* es un evento puesto que no es posible definirla mediante un conjunto de cuatro números. El instante en que dos barras chocan es un

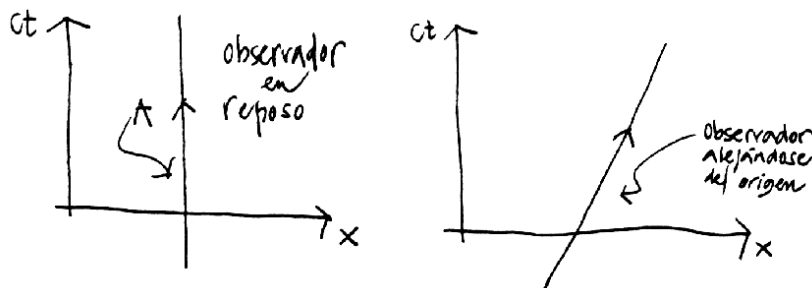


Figura VII.8: La línea A, a la izquierda de esta Figura, representa la trayectoria en el espacio-tiempo de un observador en reposo. En el diagrama de la derecha, se dibuja un observador (puntual) que se aleja del origen con una velocidad V . La recta inclinada representa la línea de universo de este observador.

evento, el tiempo asociado es el instante del choque y las coordenadas espaciales definen el lugar en que ocurrió.

Como no es posible representar 4 dimensiones en el papel, dibujaremos sólo una o dos coordenadas espaciales.

Las figuras a continuación representan un observador en 1 y 2 dimensiones espaciales.

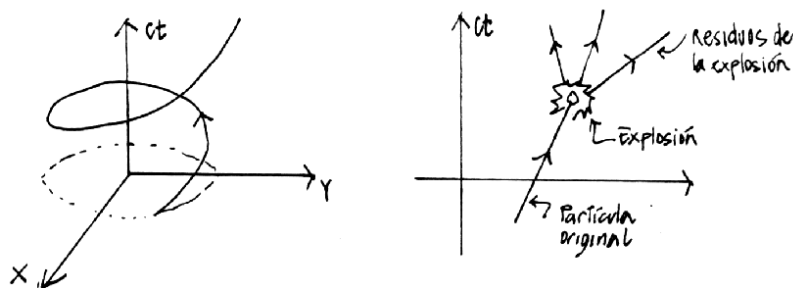


Figura VII.9: Línea de universo de una partícula que rota alrededor del origen describiendo una circunferencia de radio a . A la derecha se incluye una partícula que repentinamente explota en tres pedazos. Note que una de las trayectorias es anómala: ¿Cuál?

Si uno deja caer un objeto en una fuente con agua, se genera una onda que se aleja del punto donde cay

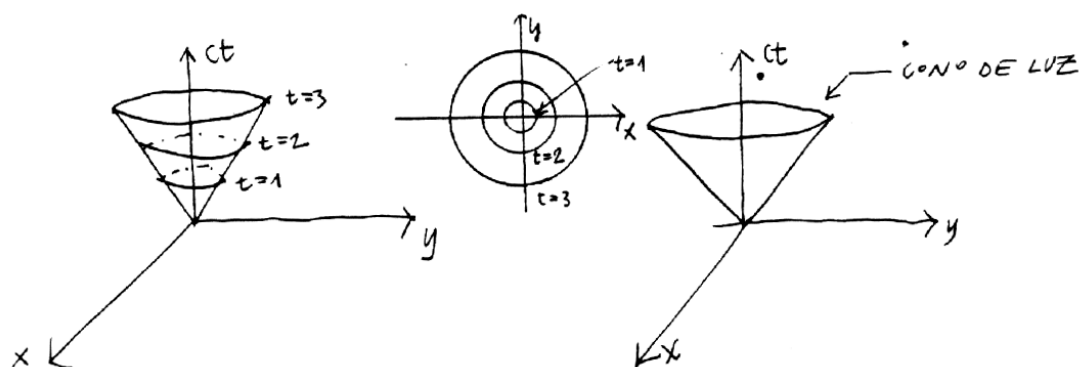


Figura VII.10: Se incluye, a la izquierda, una onda de sonido propagándose en la superficie del agua (dos dimensiones). La onda de la derecha representa un pulso luminoso propagándose en dos dimensiones. Usamos la misma escala de longitud en ambos ejes x y ct .

o la piedra con una velocidad característica. El frente de onda es una circunferencia que se expande alejándose del origen. En el diagrama espacio-tiempo, la trayectoria de una de las ondas aparece como un cono cuyo vértice descansa en el punto (evento) donde se originó la onda, que en este caso coincide con el origen del sistema de coordenadas. Algo similar es lo que sucede con un destello de luz, éste se propaga como un cascarón esférico en un espacio de 3 dimensiones. Una de las diferencias con el caso anterior es que ésta se propaga en el vacío, no necesita de una cuerda u otro medio material para propagarse. En los diagramas, esta onda se transforma en un cono de luz. Definimos ct como las dimensiones del eje vertical, de este modo todos los ejes tienen la dimensión de longitud. Esta elección es sólo una convención.

También elegiremos la escala de las coordenadas de manera que la velocidad de la luz se propague formando un ángulo de 45° con las coordenadas espaciales y el tiempo ct . Esto es una forma de facilitarnos la vida al dibujar la trayectoria de los rayos de luz. No tiene ningún trasfondo conceptual. Refleja el hecho que los rayos de luz son vitales en el desarrollo de la teoría y aparecen una y otra vez.

Esta simplificación se logra usando como unidad de longitud la misma unidad utilizada en el eje ct . De esta forma la trayectoria de un rayo de luz forma un ángulo de 45° con el eje ct . Cabe destacar –como explicaremos en detalle más adelante–, que esto ocurre sólo en el sistema de referencia donde nuestro observador se encuentra en reposo. En cualquier otro sistema de referencia, que se

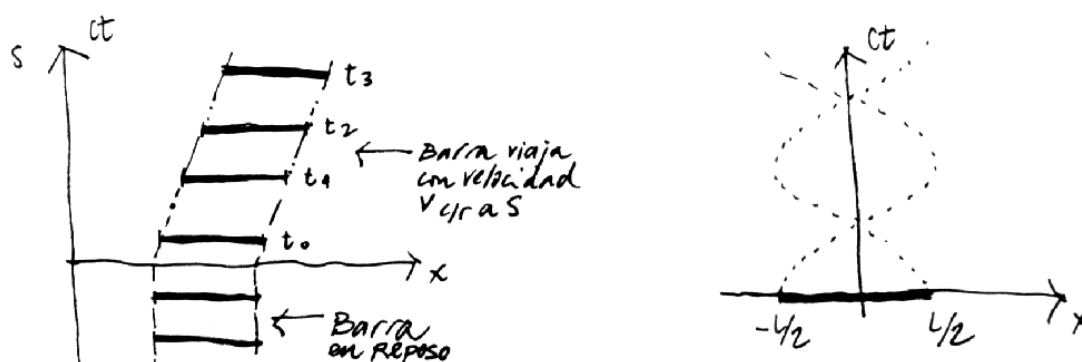


Figura VII.11: Línea de universo de los puntos extremos de una barra rígida que está inicialmente en reposo u en $t = 0$, viaja con velocidad v con respecto al sistema S . A la derecha se indica la línea de universo de los extremos de una barra que gira en torno al origen.

desplace con una velocidad finita con respecto al anterior el rayo de luz bisecta el ángulo formado por los ejes ct' y x' .

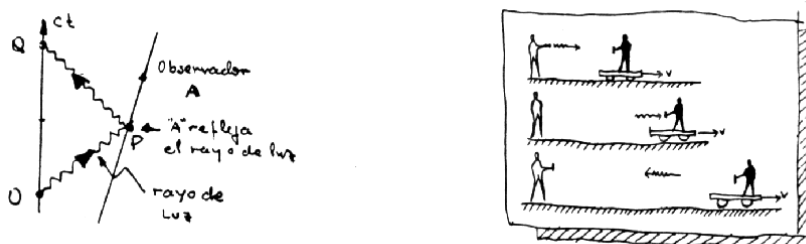


Figura VII.12: El observador A recibe un pulso de luz y lo refleja de vuelta hacia el Observador O . En nuestros diagramas usuales (sin el eje ct') lo hubiésemos descrito de la forma que se aprecia a la derecha de la figura. El observador A es la persona en el carro que se aleja.

VII.2.2. Postulados de la Relatividad Especial

Esta es una teoría del espacio-tiempo, se ha eliminado todo tipo de interacción con otras partículas o fuerzas y, de esta forma, sólo queda la *cinemática* de los

objetos. En esta sección se establecen las bases para que cada observador inercial establezca su malla de relojes sincronizados, distancias relativas y formalismo para comparar sus coordenadas con los de otro observador inercial.

Para constuir el andamiaje de cada observador inicial sólo permitiremos la emisión y recepción de rayos de luz por parte de estos observadores.

A continuación estableceremos los postulados de la Relatividad Especial.

Postulado 0

El espacio es *homogéneo e isótropo*.

Esta afirmación indica que el resultado del experimento no depende del lugar dónde se realizó (homogeneidad del espacio). Tampoco interesa la dirección donde apuntemos con nuestros ejes coordenados, todas las direcciones son equivalentes (isotropía).

En la superficie de la tierra existe una dirección preferida que está señalada por la atracción gravitacional. Al eliminar la gravitación (haciendo $G = 0$), el espacio recupera su isotropía. La homogeneidad e isotropía del espacio ha sido verificada con un error menor que $\pm 2 \times 10^{-15}$ [12].

Postulado 1

Un movimiento no-acelerado o inercial es el único que puede determinarse en forma absoluta, sin referencia a ningún otro observador.

Las ecuaciones de Newton son válidas en un sistema inercial. Un sistema inercial es aquél en el cual una partícula que está en reposo permanece en reposo. Esta es la Primera Ley de Newton, la definición de un sistema inercial.

No existe un sistema inercial, existen sólo buenas aproximaciones. La superficie de la tierra es considerada como un sistema inercial y en la mayoría de los casos se comporta de esa forma. Sin embargo, sabemos que está girando con respecto a un eje diametral y también en torno al Sol.. etc.

Resumiendo: Un *sistema inercial* ocurre cuando cada partícula de prueba que está inicialmente en reposo, permanece en reposo y cada partícula de prueba que

está inicialmente en movimiento continúa en movimiento, sin cambio en su rapidez o dirección.

Postulado 2

Existen infinitos sistemas inerciales. Cada sistema que se desplaza con respecto a otro sistema de referencia inercial con velocidad constante, constituye otro sistema inercial.

Cualquier sistema de referencia que se mueve con velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial es también inercial. Las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. Si las leyes cambiaran al ir de un sistema a otro podríamos singularizar uno de ellos y de esta forma definir un sistema maestro con respecto al cual referir toda la física. Sabemos que esto no es posible de realizar. Por tanto, debemos aceptar que los sistemas inerciales son indistinguibles.

Los experimentos descritos en el enunciado del principio de la relatividad de Galileo hacían uso de este postulado puesto que comparaban dos sistemas inerciales.

Postulado 3

La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Es una constante universal de la naturaleza.

Este postulado va mucho más allá del resultado experimental establecido en el año 1887 por Michelson y Morley, dos físicos norteamericanos que intentaron medir el cambio que, en base a la teoría del éter, debería experimentar la velocidad de la luz al propagarse a favor y en contra del movimiento de la tierra. Recordemos que el *éter* era un medio indetectable que estaba –en un sentido más bien oscuro–, en reposo absoluto. Era además el único sistema inercial en el cual las ecuaciones de Maxwell tomaban su expresión más simple y por lo tanto la más bella.

El resultado del experimento de Michelson–Morley resultó ser *nulo*: no encontraron una diferencia *detectable* entre las velocidades en los distintos sentidos. Afortunadamente, experimentos más recientes, con mayor poder de precisión, han llegado a la misma conclusión [13].

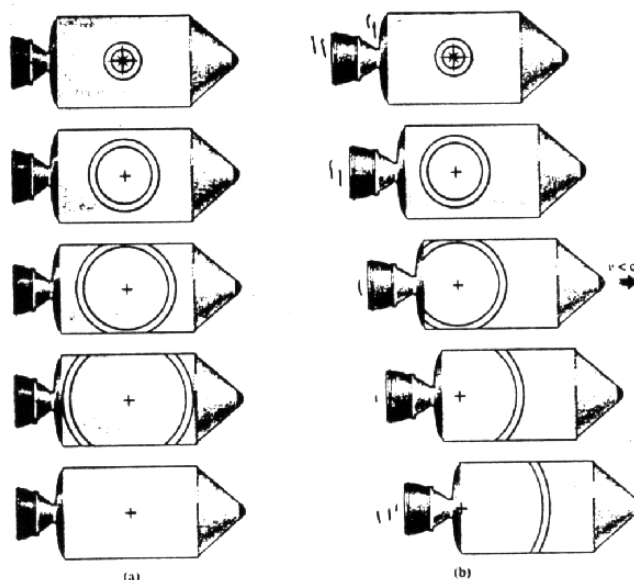


Figura VII.13: La propagación de un pulso de luz visto por un observador en reposo en la nave (izquierda) y el pulso visto por un observador en reposo fuera de la nave (figura derecha). Para éste el pulso se propaga con la velocidad c y alcanza la cola de la nave antes que la nariz, a diferencia de lo observado por el piloto de la nave.

Este experimento no se ajusta a las transformaciones de Galileo (VII.4). Si la velocidad de la luz en un sistema de referencia es c , en el sistema que se mueve con una velocidad V con respecto al anterior, de acuerdo a las ecuaciones (VII.4), debería ser $c' = c \pm V$, dependiendo del sentido en que se traslade.

Dos observadores, en movimiento relativo, que intercambian información mediante un rayo de luz, lo ven propagarse con la misma velocidad en *ambos* sistemas de referencia.

Este postulado es el origen de todas las paradojas de la relatividad especial. Esta situación se origina en nuestra ignorancia con respecto a —fenómenos que involucran velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

El valor de la velocidad de la luz que usaremos es $c = 300,000 \text{ km/s}$. La velocidad de la luz hoy en día es una cantidad que se define, no contiene error.

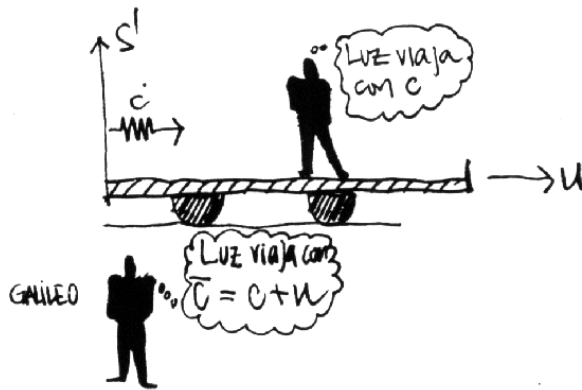


Figura VII.14: La ley de composición de velocidades usual, es decir que se ajusta a las transformaciones de Galileo, es incompatible con la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales.

Postulado 4

Definimos distancia espacial como la distancia definida en la geometría Euclídeana, medida entre dos eventos simultáneos. Por ejemplo, la longitud de una barra se define como la distancia espacial entre sus dos extremos.

Nos corresponde ahora definir simultaneidad en relatividad especial.

VII.3. Simultaneidad

El concepto de simultaneidad cambia profundamente con la relatividad especial. La definición de simultaneidad relativa que daremos a continuación es la pieza clave de este rompecabezas.

Comenzaremos con la simultaneidad absoluta, que corresponde a lo que estamos habituados, que nos resulta natural, pero que resulta ser una buena aproximación dado el valor de la velocidad de la luz. La naturaleza parece haber tomado otra opción.

VII.3.1. Simultaneidad Absoluta

(La velocidad de la luz es infinita)

Normalmente no encontramos objetos cuya velocidad es cercana a la velocidad de la luz. Para todos los efectos de la vida diaria, la luz se propaga con *velocidad infinita*. De esta forma no hay retardo en recibir la información entre dos eventos separados una distancia arbitraria. Cuando recibo el fotón indica que el evento que lo originó tomo lugar en el preciso instante en que lo recibí.

En el diagrama espacio–tiempo, esta situación se representa como dos eventos ubicados en un plano ortogonal al eje del tiempo. Esta es nuestra definición de *eventos simultáneos*.

El fotón que arranca de la máquina fotográfica se refleja instantáneamente en B y vuelve a A , donde graba la imagen de B . A y B son simultáneos.

Lo mismo sucede con el evento C , el rayo con velocidad infinita recorre en ida y vuelta el camino AC , sin demora, de esta forma A y C son simultáneos. Análogamente, y por las mismas razones A, B y C son simultáneos. Prosiguiendo con este método podemos formar *líneas de simultaneidad absoluta*. Estas son perpendiculares al eje ct .

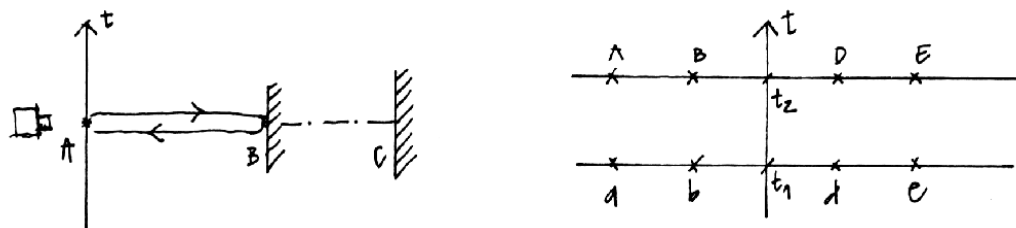


Figura VII.15: *Un destello de luz viajando con velocidad infinita. Llega a todos los lugares simultáneamente.*

Los eventos a, b, c, d y e son simultáneos y ocurren en el instante t_1 .

Los eventos A, B, C, D y E son también simultáneos, pero ocurren en el instante t_2 con posterioridad a t_1 .

Supongamos a continuación un observador que viaja con velocidad v con respecto al anterior, nos preguntamos: ¿cuál es la línea de simultaneidad que le

debemos asociar?

La respuesta es la misma que le asociamos al observador en reposo. La razón es que siendo la velocidad de la luz infinita, no importa la velocidad con que se desplace este nuevo observador, los eventos A y B, le parecerán simultáneos debido a que la luz no demora en recorrer una cierta distancia, por larga que ella sea.

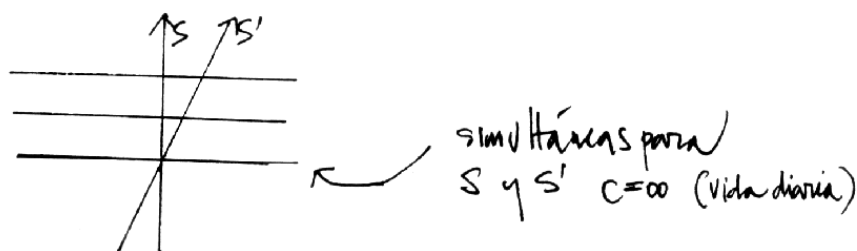


Figura VII.16: Los planos de simultaneidad son las líneas horizontales. Son los mismos para todos los observadores inerciales.

VII.3.2. Simultaneidad relativa (La velocidad de la luz es finita)

Uno de los postulados afirma que: la velocidad de la luz es finita y además tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, nos permite tener una definición única de simultaneidad. En el proceso de sincronizar relojes utilizando la velocidad de la luz, obtendremos en forma indirecta, la distancia espacial que los separa.

Se denomina *simultaneidad relativa* porque está asociada a un sistema de referencia particular. Dos eventos simultáneos, lo son sólo en el sistema de referencia en el cual así se determinó. No constituye una propiedad universal. El origen de este cambio radical se debe al Postulado 3: la velocidad de la luz es finita y toma el mismo valor en todos los sistemas inerciales.

Definimos simultaneidad en forma análoga al caso anterior: se envía un rayo de luz que rebota en el objeto y retorna a la fuente. Si el pulso de luz tardó $2T$

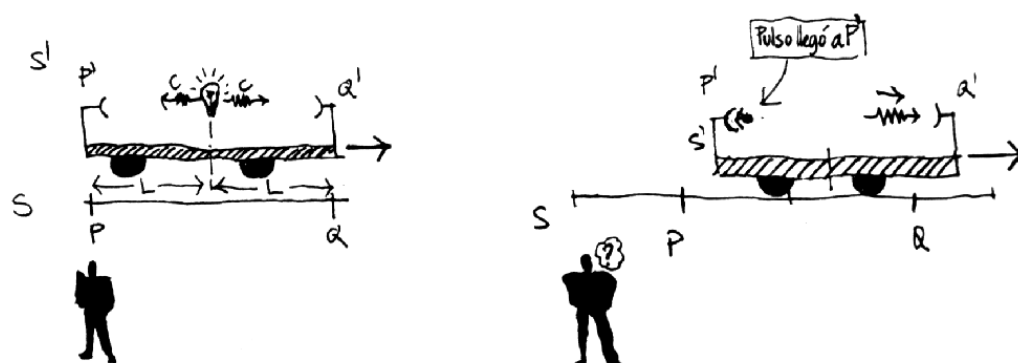


Figura VII.17: Los dos observadores no pueden coincidir acerca de la simultaneidad de dos eventos separados por una cierta distancia, si la velocidad de la luz toma el mismo valor en ambos sistemas de referencia.

segundos, concluimos que este valor señala que el objeto en el cual rebotó se ubica a una distancia $(c \cdot T)$ y se define como *simultáneos* los dos eventos siguientes: aquel cuando el rayo de luz rebota en el objeto y cuando el reloj del observador marca el instante T .

El pulso de luz se refleja en el objeto B y el reloj en reposo señala el instante T .

De esta forma la simultaneidad con respecto a un evento en el eje ct está definida de la misma forma que en el caso anterior (con $c = \infty$). La ventaja de adoptar esta definición es que en límite de bajas velocidades se aproxima al método establecido anteriormente.

Con esta estrategia podemos sincronizar los relojes en el sistema S . El método formal sería el siguiente. Al llegar al pulso a un punto del espacio, activa el reloj que allí se ubica y al reflejarse y volver al punto de partida se calcula la distancia a que se encuentra el reloj y posteriormente se le comunica que su coordenada espacial es $d = Tc$ y que debe adelantar su tiempo en d/c segundos.

De esta forma hemos definido la simultaneidad relativa al sistema S : está formado, para el caso unidimensional, por una serie de líneas todas perpendiculares al eje vertical ct que representa al tiempo que marca el reloj asignado al observador ubicado en el origen

Podemos imaginar que distribuimos una infinidad de relojes en todo el espacio

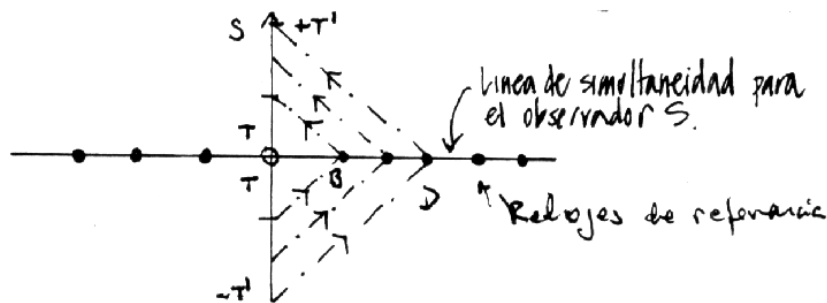


Figura VII.18: La simultaneidad se determina mediante el uso de rayos de luz. La luz tiene la misma velocidad en todas las direcciones. Demora lo mismo en llegar al punto A que en volver de A al origen.

y mediante una serie de señales como la indicada, sincronizar cada uno de ellos con el reloj principal y, al mismo tiempo, asignarle una coordenada de la forma ya explicada.

Resumiendo, podemos decir que a la nube de eventos que pueblan el espacio tiempo, le hemos asignado un tiempo y una coordenada espacial usando un método, es decir aplicable a cualquier sistema de referencia inercial. Abandonamos la existencia de un espacio rígido y un tiempo único y absoluto, que formaba el esquema Neutriano

A continuación usaremos esta definición para asignar las coordenadas espacio temporales a un observador que designamos como S' , y que aleja con velocidad V constante, del observador en el sistema S . Como S' constituye también un sistema inercial, debemos aplicar el mismo método para definir las superficies de simultaneidad: el rebote de los rayos de luz. De la Figura se aprecia que debido a la asimetría del eje ct' , las líneas de simultaneidad no van a coincidir con aquellas de S , como era el caso en la simultaneidad absoluta.

Después de determinar dos puntos simultáneos, definidos como el punto de rebote del rayo y el punto medio del tramo comprendido entre la partida y el regreso del destello de luz, es evidente de la Figura que las líneas de simultaneidad están inclinadas con respecto a las anteriores.

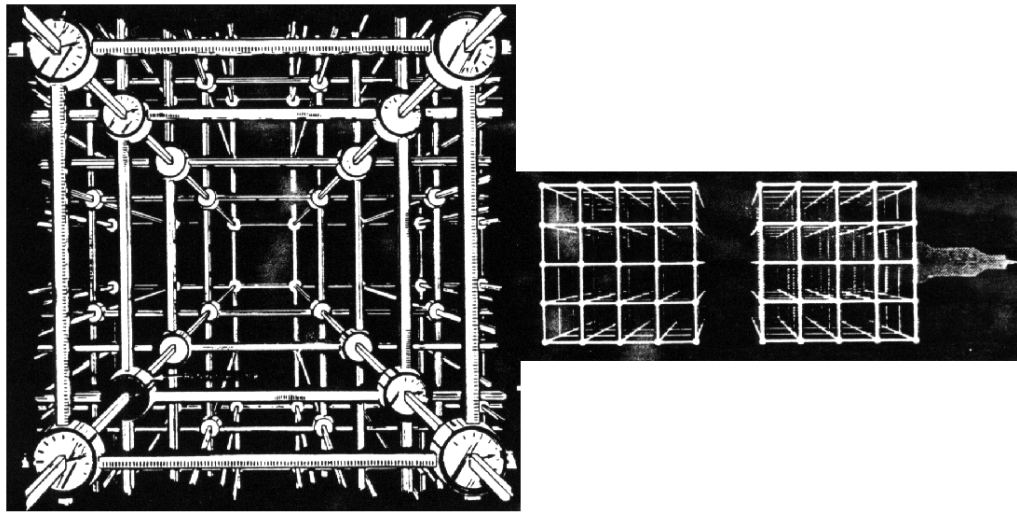


Figura VII.19: *El observador en el Laboratorio y el Astronauta en su nave (a la derecha de la Figura), construyen, en forma independiente su enrejado espacio-tiempo. Cada uno de ellos lo construye rectangular (como el que aparece a la izquierda en la Figura). La dificultad se traslada entonces al proceso de relacionar un sistema con el otro.*

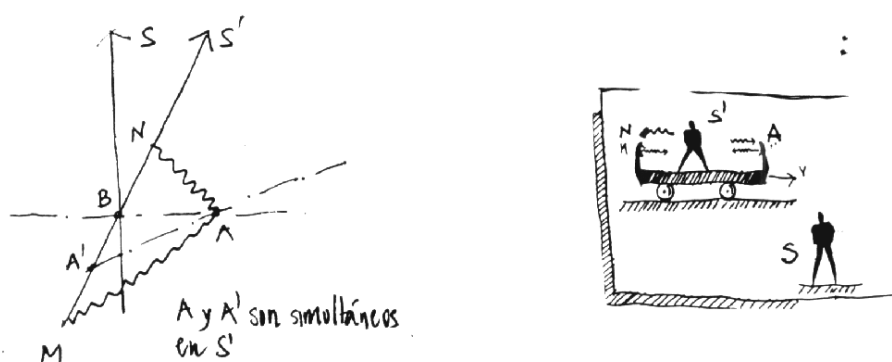
La velocidad de la luz es finita y toma el mismo
valor en todos los sistemas inerciales



dos eventos simultáneos en un sistema de referencia inercial,
no lo son en ningún otro sistema en movimiento relativo.

Si, al igual que el caso anterior, repetimos el proceso con otros puntos, desarrollamos una familia de líneas de simultaneidad asociadas al observador S' .

En la Figura siguiente, se aprecia que los puntos (eventos) A y B, son simultáneos para el observador S (y también para todo su equipo de relojes sincronizados), pero *no* lo son para el observador designado por S' . De hecho, en el sistema S' , A sucede antes que B. La simultaneidad es *relativa*, está asociada a un sistema de referencia específico.



VII.3.3. La velocidad de la luz y la simultaneidad relativa

En la parte izquierda de la Figura, los rayos provenientes de los extremos de la estación (nave superior) llegan simultáneamente al centro donde se ubica el director de la estación. Para él no hay problema, ambos rayos salieron simultáneamente y llegaron simultáneamente al centro de la estación. En cambio para el astronauta viajando en la nave espacial -que sabe que ambos rayos salieron del extremo de su nave debido a que existe evidencia fotográfica (por ejemplo)-, hay otras interpretaciones posibles. Examinaremos sólo dos de ellas aquí. El punto de vista pre-relativista, el más cercano a nuestra intuición, nos ofrece la siguiente explicación: ambos destellos salieron simultáneamente de ambos extremos de la nave (la idea de simultaneidad absoluta) pero, como nos estamos desplazando hacia la izquierda, el fogonazo de la izquierda se acerca más rápido, con velocidad $c + v$. Por otra parte el destello proveniente de la cola se está alejando y tiene velocidad $c - v$. Por el argumento anterior es fácil darse cuenta que uno de los rayos debe llegar antes que el otro. *El problema con esta interpretación es que no hay experimento alguno que indique que la velocidad de la luz dependa de la velocidad*

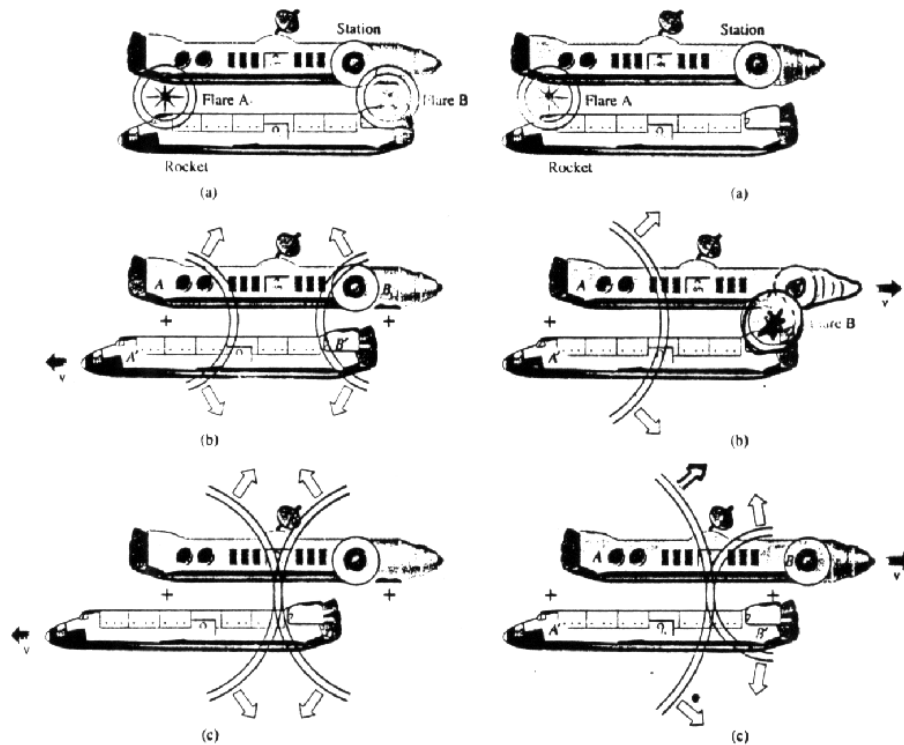


Figura VII.20: El observador en la estación espacial permanece en reposo mientras que el astronauta en la nave espacial se aleja de la estación con velocidad constante. Examinamos aquí el conflicto de la simultaneidad generado por la constancia de la velocidad de la luz en ambos sistemas de referencia.

de la fuente que la emitió. En consecuencia optamos por la interpretación ofrecida en el esquema de la derecha de la Figura, que podemos resumir con las dos afirmaciones siguientes:

- La velocidad del destello proveniente de la cola y de la nariz se aproximan con la misma velocidad: c .
- Alcanzan el centro de la nave en tiempos diferentes porque el operador de la estación espacial no los disparó simultáneamente, de hecho gatillo el de nariz primero y después el de cola.

VII.4. El Método de Bondi

VII.4.1. El Efecto Doppler

Desde los años 1920 sabemos que las galaxias están alejándose de la nuestra con una velocidad proporcional a la distancia que nos separa. La frecuencia $\nu \equiv 1/T$ de la luz que proviene de estas galaxias y la identificación del átomo que las emitió, revela que nos llegan con un cierto corrimiento en el valor de la frecuencia $\nu' = \nu + \Delta\nu$. Esta diferencia, más algunos resultados básicos de cosmología, nos permite estimar la velocidad con que se están alejando. Este fenómeno se denomina *corrimiento al rojo*, que resalta el hecho que las galaxias se alejan. Si las galaxias estuviesen acercándose, el corrimiento cambiaría de signo y se denominaría *corrimiento al azul* (la frecuencia aumenta).

Una explicación cualitativa de lo que aquí sucede es la siguiente: suponga que enviamos una señal a un habitante de dicha galaxia, ésta consiste en dos destellos de luz separados por un intervalo T . Como, desde nuestro punto de vista, la otra galaxia se aleja, el segundo destello debe recorrer un trayecto más largo que el primero y por lo tanto demora más en alcanzar la galaxia y en ser detectado por uno de sus habitantes. Este retraso depende linealmente del lapso que media entre ambas señales T y de la velocidad relativa entre ambos medios. Si designamos como kT , el intervalo con que se recibe la señal, donde $k = k(v)$ es una función que sólo depende de la velocidad de separación de estos dos objetos.

Utilizaremos esta función $k(v)$ para desarrollar las ecuaciones que caracterizan a la relatividad especial. Toda la relatividad especial es comparar las mediciones de un sistema inercial con las de otro que se desplaza con velocidad relativa.

Esta función k tiene una interpretación física bien concreta: es el efecto Doppler relativista, de esta manera, cuando en la siguiente sección calculemos el valor de k , habremos encontrado el valor que debemos utilizar para determinar el corrimiento de la frecuencia de un objeto que se aleja (o acerca) en forma relativista.

VII.4.2. La función k

La función k fue introducida hace alrededor de 50 años por Hermann Bondi, un físico del Reino Unido. El desarrollo que hemos adoptado aquí es una versión más detallada de lo expuesto por R. Wald [6] en su libro.

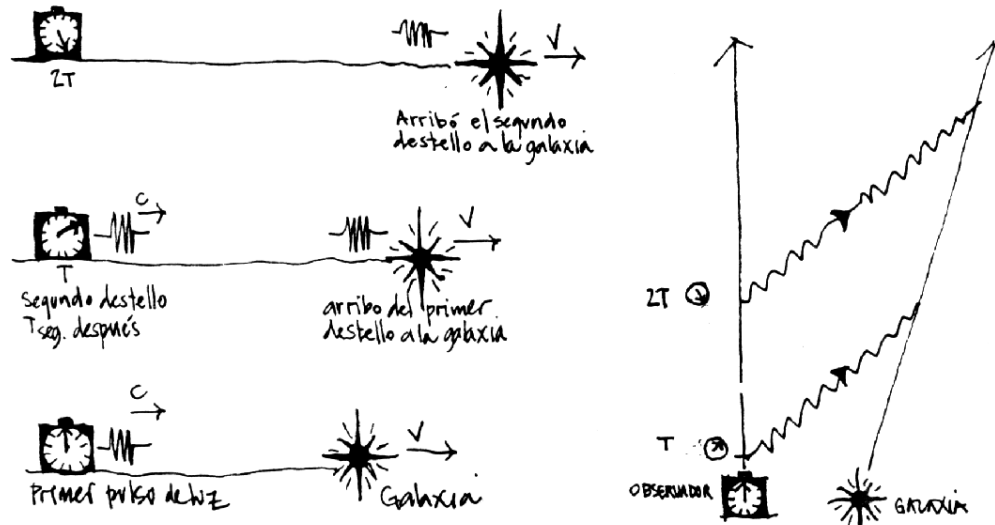
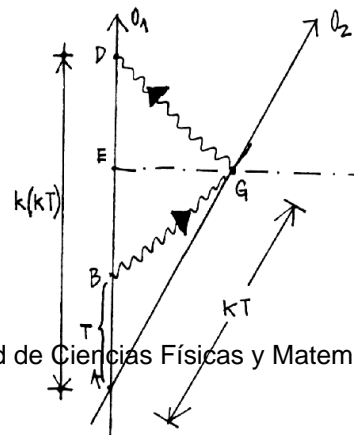


Figura VII.21: En la figura de la izquierda se ilustra cómo un fotón alcanza una fuente en movimiento. A la derecha se incluye el diagrama de Bondi para este mismo caso.

A continuación calcularemos analíticamente la relación entre las mediciones hechas en distintos sistemas de referencia. Usaremos el método gráfico. Primero calcularemos el efecto Doppler relativista, cuyo nombre se refiere al cambio de color (o longitud de onda) que detecta un observador en reposo cuando un rayo de luz (o un sonido) es emitido desde una fuente en movimiento, o viceversa, el observador está en movimiento y la fuente emisora en reposo. Para que este fenómeno ocurra debe existir una velocidad relativa V entre la fuente y el observador.

En A dos observadores (puntos) inerciales O_1 y O_2 , se cruzan y sincronizan sus relojes. De acuerdo al reloj de O_1 , T segundos más tarde, éste envía un rayo de luz a O_2 . Este lo recibe en el instante que definimos como kT . Postulamos aquí que cualquier diferencia en los intervalos puede ser explicada en base a esta función $k(v)$. La función k sólo puede



depender de la velocidad relativa v , puesto que es el único parámetro del problema: $k = k(v) \geq 0$. Además, si $v \rightarrow 0$, $k \rightarrow 1$, puesto que no hay velocidad relativa en este caso.

Si a su vez O_2 , al recibir la señal la responde inmediatamente, entonces O_1 la recibirá en el instante $k(kT)$.

El último argumento se apoya en el postulado # 3, que señala que ambos sistemas son equivalentes, de forma que si al ir de O_1 hasta O_2 el intervalo de tiempo aparece multiplicado por un factor k , lo mismo debe suceder al viajar de O_2 hacia O_1 . Ambos son sistemas inerciales, indistinguibles y sincronizaron sus relojes en A . Cada vez que un observador (S) detecte que otro sistema de referencia (S') se está *alejando*, los intervalos de tiempo se relacionarán con la función $k(v)$ como se ha especificado aquí.

La distancia espacial \overline{EG} que aparece en el gráfico se puede calcular de dos formas:

Primer Método: podemos calcular cuánto se demoró el rayo de luz en llegar al punto G que, como es simultáneo con E en el sistema S , es equivalente a calcular el tiempo que marca el reloj del observador en E . Este valor es:

$$\overline{EG} = c \cdot \frac{DB}{2} = c \cdot [k^2 - 1] \frac{T}{2}. \quad c \equiv \text{velocidad de la luz.} \quad (\text{VII.5})$$

Recuerde que la simultaneidad es un concepto relativo en esta teoría, por lo tanto cuando decidimos comparar dos eventos simultáneos para el observador O_1 , hemos quebrado la simetría entre los dos sistemas inerciales O_1 y O_2 . Los resultados son válidos sólo para el sistema de referencia O_1 .

Volviendo a nuestro cálculo, sabemos que la distancia que se alejó O_2 a partir del punto en que ambos coincidían, (A) es:

$$\overline{EG} = v \cdot \overline{AE} = v \cdot (k^2 + 1) \frac{T}{2}. \quad (\text{VII.6})$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos:

$$v \cdot [k^2 + 1] \frac{T}{2} = c(k^2 - 1) \frac{T}{2}, \quad \text{despejando (v/c), se obtiene:}$$

$$\beta \equiv \left(\frac{v}{c}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \quad k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Notemos que, si $k = 1$, entonces $\beta \rightarrow 0$ lo cual equivale a que la velocidad de la luz c , sea infinita. Este es el límite Newtoniano: en este caso las transformaciones de Lorentz, que deduciremos más adelante, toman la forma de las transformaciones de Galileo (VII.4).

Ya hemos encontrado k como función de la velocidad. Podemos explicar brevemente como podemos detectar la velocidad de un objeto mediante pulsos enviados con un intervalo de tiempo T . Estos al rebotar en el objeto que se aleja con velocidad v_o vuelven en un intervalo $(k^2 - 1) \cdot T$. Al medir este intervalo y conociendo T y la expresión –ya obtenida– de k^2 podemos conocer la velocidad. Este es el principio físico que regula el funcionamiento de los radares de velocidad de la policía.

Para dos sistemas *alejándose*: $k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$

Para dos sistemas *acercándose*: $\bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$

Ejercicio

Demuestre que:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2\gamma, \quad \text{donde hemos definido } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

VII.4.3. Dilatación del Tiempo

Usando la definición del factor $k(v)$, podemos demostrar que el tiempo transcurre más lentamente para un observador que se aleja de nosotros con velocidad constante. En este caso haremos las comparaciones entre dos eventos que son simultáneos con respecto a nosotros, el sistema de referencia en *reposo*. De esta forma nuestros resultados no son universales, son sólo válidos en nuestro sistema de referencia. La razón: la simultaneidad es *relativa*.

De la Figura, los eventos A y B , son simultáneos en el sistema S . Si definimos como $\Delta t|_S = OA$, los segundos que marca el reloj del observador en reposo con respecto a S , debemos evaluar la cantidad $\Delta t' \equiv \Delta t|_{S'} = OB$: es decir ¿qué tiempo indica el reloj que se mueve con el observador S' ?

De la geometría de la Figura obtenemos que:

$$OA = \frac{k^2 - 1}{2} T + T = \frac{k^2 + 1}{2} T.$$

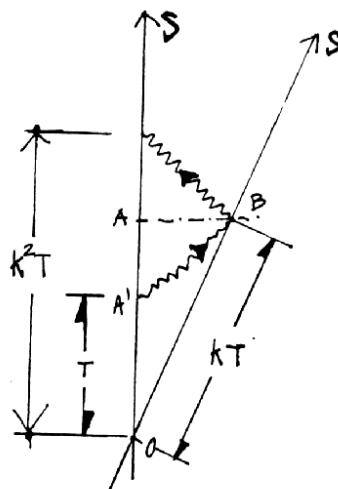
El reloj del observador S' , que se aleja de A , al pasar frente a B marca (de acuerdo a la definición de k)

$$OB = kT.$$

Si comparamos los tiempos:

$$OA \equiv \Delta t|_S = \frac{k^2 + 1}{2} T,$$

$$\text{con } OB \equiv \Delta t'|_{S'} = kT,$$



despejando T de las ecuaciones anteriores, obtengo

$$\Delta t|_S = \frac{\Delta t'|_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{VII.7})$$

Esta es la dilatación del tiempo de acuerdo al observador en reposo en S . Si $\Delta t' = 1$, entonces $\Delta t > 1$, el tiempo transcurre más lentamente en el sistema S' . \square

El hecho que el tiempo transcurre más lentamente en el sistema que está en movimiento, *no* determina si un sistema se encuentra en reposo absoluto con respecto a otro. La razón es la siguiente: al comparar los tiempos $\Delta t|_S$ y $\Delta t'|_{S'}$ para dos eventos *simultáneos en S* , estamos quebrando la simetría entre los sistemas S y S' , y de esta forma obtenemos el resultado asimétrico ya señalado.

A continuación se demuestra que la expresión para la dilatación del tiempo es simétrica: el observador en reposo en S' , midiendo dos eventos simultáneos en su sistema de referencia encuentra que el tiempo transcurre más lentamente en S .

Ejercicio

Repetir el mismo procedimiento para comparar lo que marcan los relojes, *pero ahora midiendo eventos simultáneos en S'* . Obtenga:

$$\Delta t|_S = \frac{\Delta t'|_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \square$$

¿Realmente se atrasa el tiempo para un observador en movimiento?

La palabra *realmente* utilizada en la pregunta parece esperar una respuesta que traiga a escena el tiempo absoluto. Al formularla no se hace mención al sistema de referencia que se considera.

La respuesta es que este resultado sólo señala que el sistema de relojes sincronizados por S' se atrasan con respecto a aquellos sincronizados por S . Pero este resultado, de acuerdo a S' no permite concluir nada puesto que, en su opinión,

los relojes de S no están sincronizados. Para ilustrar esto, podemos ubicarnos en el sistema de S' y considerar que S está retrocediendo con respecto a nosotros y repetir el mismo cálculo. Lo que obtenemos es que ahora el reloj de S se atrasa con respecto al de S' .

De aquí se desprende que este experimento no permite concluir que el tiempo transcurre diferente en ambos observadores.

Para lograr una respuesta definitiva con respecto a la evolución del tiempo en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, debemos comparar *los mismos relojes dos veces*. Con esta consideración, ya no es posible refutar un resultado debido a la imposibilidad de sincronizar los relojes de los dos sistemas de referencia. En la siguiente sección daremos una respuesta concluyente a este problema.

VII.4.4. El tiempo transcurrido depende de la trayectoria

A continuación demostraremos que el tiempo no es absoluto y por lo tanto transcurre de forma diferente para distintos observadores en movimiento relativo.

Este problema tradicionalmente se conoce como la paradoja de los gemelos. Consiste lo siguiente: uno de los gemelos permanece en Tierra mientras el otro emprende un viaje interestelar y posteriormente, al volver, se compara con su hermano.

La dificultad técnica que plantea este problema es la aceleración que experimenta el gemelo interestelar en el momento de invertir el sentido en la dirección de su viaje con el objeto de retornar. Las expresiones que hemos usado no se pueden aplicar de acuerdo a los postulados, que excluyen los sistemas acelerados. Para eliminar este problema usaremos tres sistemas inerciales sincronizados y concluiremos que el tiempo, efectivamente transcurre más lentamente en uno de los sistemas de referencia.

Antes de plantear este problema hagamos un ejercicio cuyo resultado será de utilidad más tarde.

Encontramos la expresión de k en función de v en las páginas anteriores. Note que $k(-v) = 1/k(v)$, es decir que cuando dos observadores se aproximan debemos usar $(1/k)$ en lugar de k para relacionar los intervalos correspondientes de tiempo. Para demostrar que el tiempo **no** es absoluto y depende del camino recorrido necesito 3 observadores (o relojes) A , B y C .

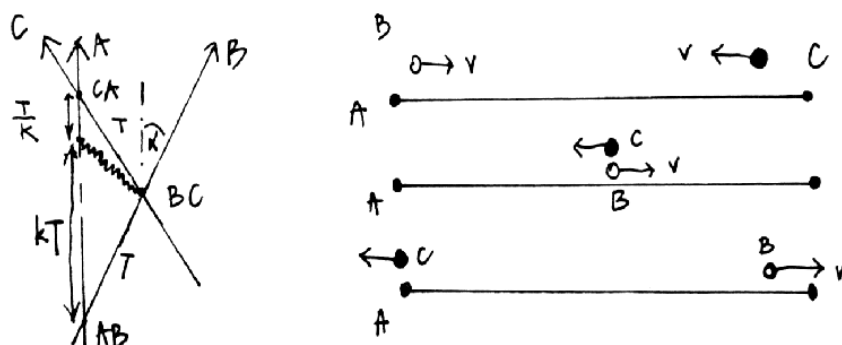


Figura VII.22: Nos ubicamos en A, sistema en reposo. B se aleja de A con una velocidad relativa V y C se aproxima hacia A con una velocidad V (según A). A la izquierda se indica el gráfico ct versus x y a la derecha el esquema habitual con la coordenada x en el eje horizontal.

En el desarrollo del problema distinguimos 3 eventos:

→ A coincide con B definido como: AB

→ B coincide con C definido como: BC

→ C coincide con A definido como: CA

Denominamos T al tiempo indicado por el reloj de B que transcurre entre el evento: [A coincide con B] y el otro evento [B coincide con C]. El intervalo que transcurre entre el evento: [B coincide con C] y el evento [C coincide con A] es también T , según el reloj de C. Esto se puede notar en la Figura, las líneas de universo de C y B son simétricas con respecto a la vertical, porque los trazos que van desde [AB], hasta [BC] y desde [BC] hasta [CA], son idénticos y por lo tanto ambos toman el valor T .

De acuerdo al álgebra de los k el tramo entre los eventos [AB] y [AC] es

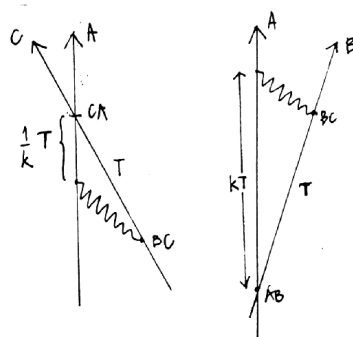


Figura VII.23: El factor k y $1/k$ aparecen cuando los observadores se alejan y cuando se están acercando, respectivamente.

$$[kT + T/k].$$

Por otra parte, si en $[BC]$, el observador B accionó el reloj de C y lo dejó marcando T segundos, cuando C llegue al encuentro con A marcará un tiempo $2T$. Comparando ambas cantidades, podemos concluir:

$$(k + \frac{1}{k})T \geq 2T$$

Estas expresiones son iguales sólo si $k = 1 \Rightarrow v_0 = 0$, ó $c = \infty$.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 2.$$

De esta forma el tiempo que marca el reloj C es menor que el indicado por A . El tiempo no es absoluto, no transcurre igual para todos los observadores.

En el caso de los gemelos la respuesta es similar a la obtenida aquí. El gemelo de viaje llega más joven al encuentro con su hermano. La diferencia de edad no es la que obtuvimos, puesto que es necesario considerar la aceleración que experimenta durante parte del viaje. En este caso no tiene sentido intentar utilizar el argumento de la simetría de los sistemas inerciales para invalidar el resultado. El gemelo que estuvo de viaje sabe perfectamente que su sistema de referencia, al menos por unos segundos, no fue inercial.

También se puede objetar que en el caso propuesto no se comparan los mismos relojes en A , pero lo esencial aquí es que el reloj C al compararlo con el de A , traía información acerca del tiempo empleado por un reloj B al recorrer el trayecto que le correspondía. Se demostró entonces que el tiempo contabilizado a lo largo del camino $AB \rightarrow BC \rightarrow y CA$, es más corto que el tiempo contabilizado por S entre AB y CA .

VII.4.5. La contracción del largo de una barra

Definición de longitud

Para medir la *longitud de una barra* un observador en reposo con respecto a ella, se ubica en el medio de la barra y mide el tiempo que demora un rayo de luz en viajar hacia un extremo y volver al punto de partida.

¿Cómo sabemos que estamos en el centro de la barra?

Antes de proceder a medir la longitud de la barra el observador envía en forma simultánea dos rayos de luz hacia ambos extremos de la barra donde serán reflejados. Si recibe de vuelta ambos simultáneamente entonces está justo en el punto medio de la barra. De otra forma deberá desplazarse hasta lograrlo.

¿Por qué medir longitudes con un rayo de luz y no con un metro patrón?

Porque la velocidad de la luz es una constante universal. De esta forma los resultados obtenidos utilizando la luz son válidos en cualquier sistema de referencia inercial.

Contracción del largo

La inclusión del postulado # 3, indica que sólo está definida la distancia espacial –o el largo entre los extremos de una regla– entre dos eventos que ocurren simultáneamente en un sistema de referencia.

Estudiaremos la contracción del largo usando el álgebra de los k .

Por definición la longitud es la distancia *espacial* entre dos eventos simultáneos. Aquí vamos a comparar el largo L' de un barra en reposo en un sistema S' , con el largo de esta misma barra, pero medido en el sistema S , que lo denominamos L . La configuración se indica en la Figura adyacente.

El método que usaremos nos permitirá manipular coordenadas en distintos sistemas de referencia.

Calculemos las coordenadas del evento N en el sistema S . De la Figura se desprende que

$$c \Delta t_+ = (L + v \Delta t_+), \quad \text{y que}$$

$$c \Delta t_- = (L - v \Delta t_-).$$

Este resultado se obtiene siguiendo la trayectoria del punto M en la Figura. En

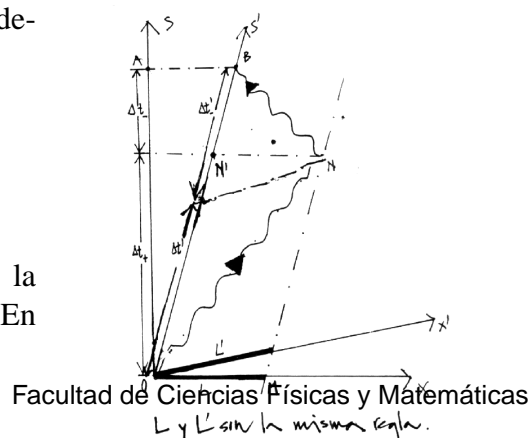


Figura VII.24: *Qué mide el observador S y qué mide el observador S'. Líneas de simultaneidad en cada sistema de referencia.*

$t = 0$ su coordenada espacial es L , en Δt_+ es $[L + v \Delta t_+]$, puesto que se está alejando de S .

En Δt_+ , la barra está representada por NN' según el observador S . En ese instante se envía un rayo de luz hacia el origen de la barra. Lo alcanza en Δt_- segundos más tarde y la distancia que debe recorrer es el largo de la barra menos lo que ésta se acerca, en el intervalo de tiempo Δt_- , una distancia $L - v \Delta t_-$. Despejando $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$ de estas dos expresiones obtenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}. \quad [i)]$$

Como los eventos marcados por A y B son simultáneos, utilizando los resultados del último ejercicio, tenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{\Delta t'_+ + \Delta t'_-}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [ii)]$$

Finalmente, como en el sistema S' , el rayo de luz parte del origen de la barra en $t_0 = 0$ y vuelve a S' en B , después de rebotar en el otro extremo de la barra, entonces tenemos:

$$c[\Delta t'_+ + \Delta t'_-] = 2L' \quad [iii)]$$

Despejando $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$ de las ecuaciones [i)] y [ii)], e incluyendo el valor de $(\Delta t'_+ + \Delta t'_-)$ obtenido en [iii)], tenemos la relación deseada entre L y L' :

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Comprobamos que $L < L'$, al medir el largo de una barra en movimiento, medimos un largo menor. Como hemos señalado, este hecho es consecuencia de que la simultaneidad es relativa. A la barra no le pasa absolutamente nada, no se comprime.

VII.4.6. Las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz son las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un evento $P = (t_p, x_p)$, en un sistema inercial S , con las coordenadas que describen el mismo evento P , en otro sistema S' : $P = (t'_p, x'_p)$.

Constituyen el equivalente a las transformaciones de Galileo para ir de un sistema inercial a otro con velocidad v_0 .

El punto P es lo que hemos denominado un evento en el espacio-tiempo. Con respecto al observador A , el punto P tiene coordenadas $P(t, x)$ puesto que consideramos sólo dos coordenadas una espacial y otra temporal, para mantener la simplicidad. En la figura, el origen del tiempo se ubica arbitrariamente en cualquier punto de la línea de universo de A .

El sistema de coordenadas se ubica con el observador A , éste tiene coordenadas $(t, 0)$. El punto Q es simultáneo con P y por lo tanto ambos tienen la misma coordenada temporal en el sistema A .

$$Q = Q(t, 0), \quad P = P(t, x).$$

Para enviar un rayo de luz desde A hasta P , debo gatillar el haz de luz en el instante $(t - x/c)$. Dicho rayo rebota en P y alcanza A en el instante $(t + x/c)$.

La cantidad (x/c) tiene dimensiones de tiempo.

Supongamos que existe otro observador inercial B , que asigna al evento P , las coordenadas (t', x') . La relación entre (t, x) y (t', x') , que respeta los postulados de la relatividad especial, se denominan las transformaciones de Lorentz. Ubicamos el origen del tiempo en la intersección de las líneas de universo de A y B . Al enviar un rayo de luz desde A , este cruza la línea de universo de B en $(ct' - x')$ y posteriormente alcanza el punto P . De vuelta toca la línea de universo de B en $(ct' + x')$ y A en $(ct + x)$.

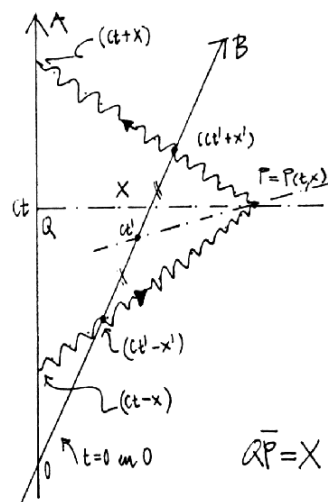


Figura VII.25: Un rayo de luz cruza a los dos observadores.

Usando el método de la función k , podemos relacionar ambos sistemas de referencia.

$$ct' - x' = k(ct - x),$$

Este caso corresponde a la relación que existe entre el tiempo que transcurrió entre el origen del tiempo (intersección de las líneas de universo de A y B) y el instante en que se envía el primer rayo desde A y el tiempo que tarda B en recibirlo: $T' = kT$.

El siguiente caso, corresponde al rayo de luz reflejado desde el punto P y relaciona el tiempo que ha transcurrido según el reloj de B cuando recibe el rayo de luz, con el tiempo que ha transcurrido para A cuando recibe de regreso el mismo rayo de luz:

$$(ct + x) = k(ct' + x')$$

De estas dos ecuaciones se puede despejar x' y t' como funciones de x y t .

$$2ct' = k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

$$2x' = -k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

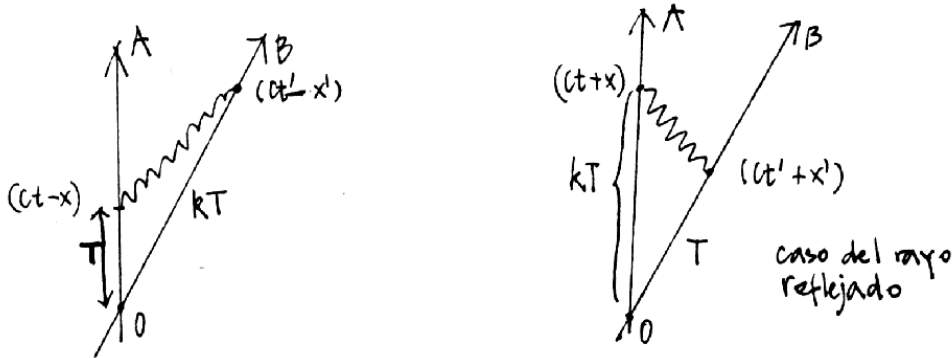


Figura VII.26: En la figura de la izquierda debemos identificar T con $(ct - x)$ y kT con $(ct' - x')$.

pero recordando que:

$$\frac{1}{2}(k \pm \frac{1}{k}) = \begin{cases} \gamma \\ \beta \gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Donde hemos definido $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/[\sqrt{1-\beta^2}]$.

Despejando x' y t' de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \gamma \{x - vt\}, \\ \mathbf{t}' &= \gamma \{t - \frac{v}{c^2} x\}. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

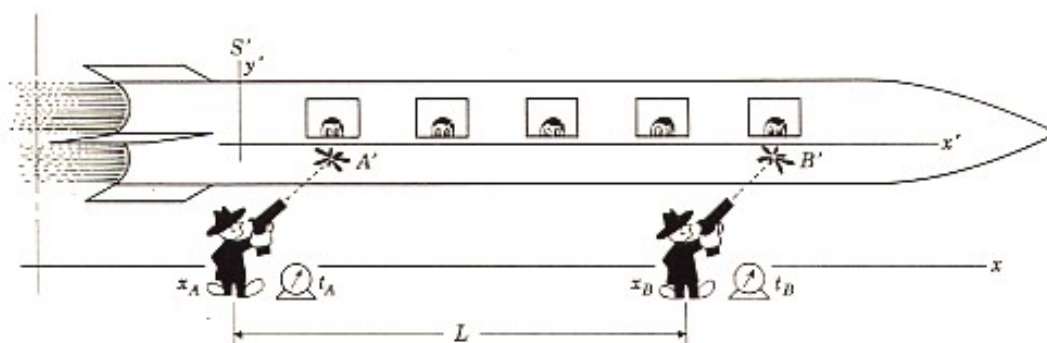
Ejemplo

Un tren S' se mueve con velocidad $v = 0,6c$ en la dirección $+x$ con respecto a un observador en reposo en el sistema S . Dos rufianes con sendos atomizadores, se ubican a $L = 5m$ de distancia en el sistema S . Ambos rufianes disparan simultáneamente de acuerdo a relojes sincronizados en el sistema S . Al gatillar el atomizador aparecen 2 manchas A' y B' en el tren. Los rufianes aseguran que la distancia entre las manchas es $L = 5m$ (La distancia que separa los atomizadores del tren es *despreciable*).

a) Los pasajeros del tren llevan sus relojes sincronizados. De acuerdo a los pasajeros del tren ¿quién disparó primero?

b) ¿Cuál es la distancia entre las dos manchas medidas por un observador en reposo con respecto al tren?

c) ¿Cuál es la distancia entre los dos rufianes, de acuerdo a los pasajeros en reposo con respecto al tren?



Respuesta

Del gráfico se desprende que B sucede antes que A , según un observador en la nave. Calculemos la diferencia de tiempo. Debemos comparar los eventos A y B en los dos sistemas de referencia. En el sistema fijo a la tierra los eventos A y B son simultáneos y ocurren a una distancia L :

$$\Delta x = L, \text{ y } \Delta t = 0.$$

En el tren, las coordenadas son

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = -\gamma \frac{v L}{c^2}.$$

Donde $\Delta t' \equiv [t'_B - t'_A] = -\gamma \frac{L v}{c^2}$.

$$c t'_B = 0 - 5 \frac{3}{5} \frac{5}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$t'_B = 1,25 \times 10^{-8}.$$

Las dos manchas una vez en el tren se propagan rígidamente con él, es decir su línea de universo nace en A y B pero a partir de entonces se propaga paralela a la línea t' . La distancia entre las manchas, medida con un metro por un observador en la nave es AC , que definimos como L' .

¿Cuánto vale L' ?

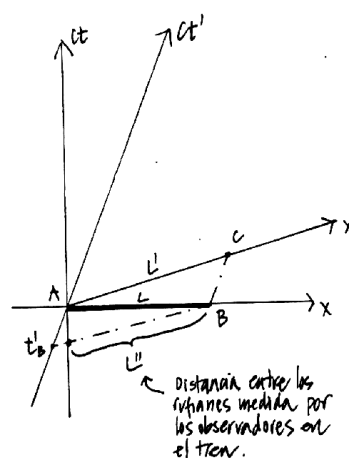


Figura VII.27: .

i) *Primer método.*

De acuerdo a las transformaciones de Lorentz, la coordenada del punto C en función de las coordenadas del mismo evento en tierra, son:

$$x'_c = \gamma [x_c - v(t_c - t_A)],$$

pero x_c es la posición en el sistema S del extremo de la barra después que ha transcurrido un intervalo $(t_c - t_B) \equiv (t_c - t_A)$, su valor es:

$$\begin{aligned} x_c &= x_B + v(t_c - t_A), \text{ además } x_B \equiv L, \\ x_c &= L + v(t_c - t_A), \end{aligned}$$

de modo que:

$$x'_c = \gamma [L + v(t_c - t_A) - v(t_c - t_A)] = \gamma L.$$

$$L' = \gamma L.$$

ii) *Segundo método.*

C es la proyección de la coordenada x' de B . Eso es precisamente lo que representan las Transformaciones de Lorentz: una proyección del vector $(AB$ en este caso, del sistema (x, t) al sistema (x', t') . La proyección de B en x' es simplemente $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma L$, ($\Delta t = 0$, puesto que AB es simultáneo S). Además $x'_B = x'_C$ puesto que B y C están en la línea de universo de un observador en reposo en S' . $L' = 1,25L = 6m$. Note que $AC > AB$ $AC_1 > A_1B$.

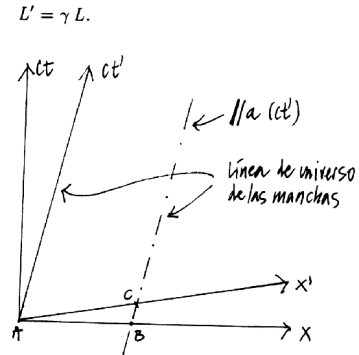


Figura VII.28: Distancia entre manchas.

c) La línea de universo de los dos rufianes son rectas verticales en el diagrama de espacio-tiempo fijo en la tierra (S).

A y B señalan la posición de los rufianes. Esta distancia según un observador en el tren es la intersección entre la línea de universo de B y la línea de simultaneidad de un observador en el tren (por ejemplo : el punto C . La coordenada de C en el sistema (t', x') :

$$x'_c = \gamma [x_c - (t_c - t_B)v],$$

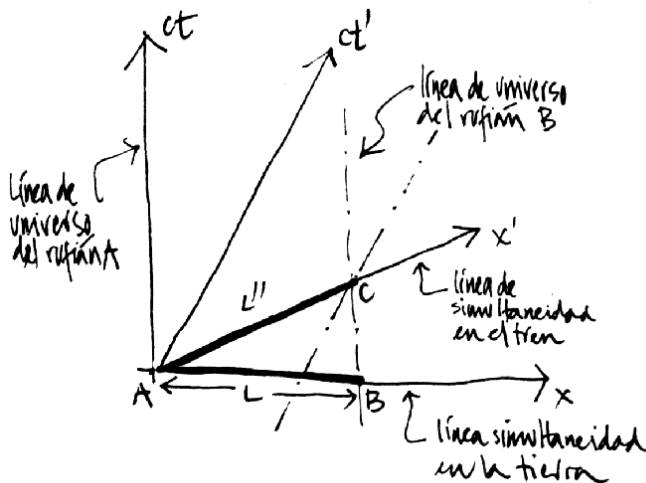
$$x_c = x_B = x_B - 0 = x_B - x_A = L,$$

$$x'_c = x'_c - x'_A = L'',$$

$$L'' = \gamma [L - v(t_c - t_B)]$$

$$\text{pero } t'_c - t'_A = \gamma \left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_c - x_A) \right]$$

$$A \text{ y } C \text{ son simultáneos en } S', \text{ luego: } \gamma \left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}L \right]$$



$$t_B \equiv t_A \quad (\text{simultáneo en } S)$$

$$x_c \equiv x_B \quad \text{en } S$$

$$L'' = \gamma \left[L - \frac{v^2}{c^2} L \right] = \frac{1}{\gamma} L. \square$$

Ejemplo

Sean S y S' , dos sistemas inerciales que coinciden en un instante. S' se mueve con respecto a S en la dirección $(x+)$, con una velocidad $v = \text{constante}$. En el origen de S' existe una pantalla de cine que proyecta una película de t' minutos, la cual es vista por un observador que se encuentra en el origen de S . ¿Cuánto tiempo dura la película para el observador en S ? Suponer $v = 0,6c$.

Utilizando las transformaciones de Lorentz, se obtiene:

$$\text{Para } S': \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right),$$

$$\text{Para } S: \quad \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right).$$

Sabemos lo que dura la película en $S' \Rightarrow \Delta t'$ es conocido (con respecto a las mediciones que hace un observador en S'). Además $\Delta x' = 0$ (la pantalla permanece fija en S'). Luego $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Sin embargo, debemos calcular el tiempo que demora en llegar a S el último fotón de la pantalla.

i.e. $\Delta t^* = \frac{\Delta x}{c}$ ya que cuando en S' terminó la película, ésta aún no ha finalizado en S .

$$\text{Por otra parte } \Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t') = \gamma v \Delta t'$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' + \Delta t^* = \gamma \Delta t' \left(1 + \frac{v}{c} \right) = 2 \Delta t'$$

VII.4.7. El retorno de lo absoluto, los invariantes.

Se puede verificar, a través de las transformaciones de Lorentz, que la combinación

$$(ct')^2 - x'^2 = ct^2 - x^2$$

es un *invariante*: posee el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Esta *distancia* la denominamos $(\Delta s)^2$. Aquí hemos encontrado una cantidad que tiene un valor independiente del sistema de referencia, es el equivalente al tiempo absoluto en la teoría de Galileo y Newton.

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Sabemos por experiencia lo importante que son las cantidades conservadas en mecánica, electricidad...etc.. El equivalente en relatividad especial son los *invariantes*.

Como ejercicio, podemos reobtener la dilatación del tiempo (que el reloj en B funciona más lento que un reloj, idéntico, en A). O_1Q y O_2P son líneas (o planos en tres dimensiones) de simultaneidad con respecto al observador A . Llamemos $\Delta s = \overline{PQ}$.

$\Delta s^2 = c^2 T'^2$, puesto que P y Q se ubican en la línea de universo de B y por lo tanto $x'_P = x'_Q$.

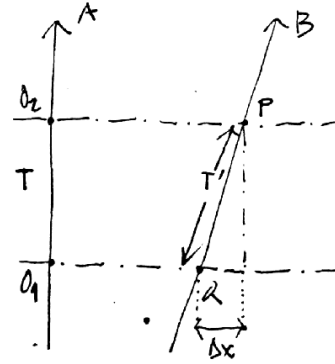


Figura VII.29: .

$$\Delta s^2 = \overline{PQ}^2 = c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2.$$

Hemos definido $\Delta x = x_P - x_Q$.

Como $(\Delta s)^2$ es un *invariante*,

$$\Delta s^2 = c^2 T'^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2$$

$$cT' = cT \left[1 - \left(\frac{\Delta x}{cT} \right)^2 \right]^{1/2},$$

pero $\Delta x/T = V_o$, velocidad con que B se aleja de A .

$$T' = T \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow T = T' / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Si $T = 1$ s, $T < 1$, puesto que $\beta \leq 1$ y $1/\sqrt{1 - \beta^2} \geq 1$. Esto se denomina la dilatación del tiempo.

VII.4.8. Composición de velocidades

Usaremos el álgebra de las funciones k para encontrar la composición de velocidades.

Los tres sistemas de coordenadas están relacionados mediante las transformaciones siguientes, el sistema A con B: $T' \xrightarrow{u} k_{AB} T$, el sistema B con C: $T'' \xrightarrow{v} k_{BC} T'$. A partir de estas relaciones podemos conocer T en función de T'' : $T'' \xrightarrow{V} k_{AB} k_{BC} T$. Si $V \equiv V_{AC}$, es la velocidad relativa del sistema C con respecto a A entonces se debe cumplir que $k_{AC} = k_{BC} k_{AB}$. Reemplazando cada uno de los k por sus respectivas velocidades tenemos:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{k_{AC}^2 - 1}{k_{AC}^2 + 1} = \frac{k_{AB}^2 k_{BC}^2 - 1}{k_{AB}^2 k_{BC}^2 + 1}$$

De aquí, haciendo el álgebra correspondiente, obtenemos la Ley de Composición de velocidades.

$$V_{AC} = \frac{(u + v)}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

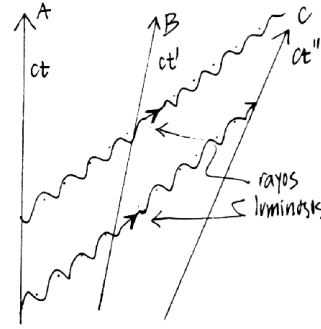


Figura VII.30: .

Para poner a prueba esta relación, supongamos que un carro se mueve con velocidad $c/2$ con respecto a la tierra. Sobre el mismo carro un atleta, super-lenteja corre con una rapidez $c/2$ en el mismo sentido que el movimiento del carro. ¿Cuál es la velocidad de este super atleta con respecto a la tierra?

Reemplazando en la fórmula anterior, tenemos:

$$V_{AC} = \frac{(c/2 + c/2)}{1 + \frac{c^2}{4c^2}} = \frac{4c}{5}.$$

La velocidad resultante es menor que la velocidad de la luz. La suma de velocidades relativistas es una expresión *no-lineal*, a diferencia del caso no-relativista.

VII.4.9. Suma de velocidades

Velocidades paralelas.

El método de los productos de la función k para obtener la suma de las velocidades no es el más sencillo. Sirve para ilustrar que todas las fórmulas de la relatividad especial se pueden obtener a través de su uso.

A continuación incluimos una derivación alternativa.

Para ello necesitamos parcialmente instaurar un postulado adicional, este es el Postulado # 5.

Postulado # 5

Barras moviéndose en forma perpendicular a la velocidad no experimentan cambio alguno. O en otra forma: los ejes perpendiculares a la dirección de movimiento no experimentan ningún cambio.

Supongamos que un cuerpo P viaja con velocidad u' con respecto a un sistema S' . A su vez, este sistema viaja con una velocidad v con respecto a s . Queremos calcular la velocidad u de este cuerpo con respecto al sistema s .

Designamos las coordenadas de P con respecto a S' como (t'_p, x'_p) . Las coordenadas de este punto con respecto al sistema s son (t_p, x_p) . La relación entre ambas coordenadas está dada por la transformación de Lorentz (donde hemos suprimido el subíndice p)

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x).\end{aligned}$$

Por definición

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad \text{la velocidad } P \text{ con respecto al sistema } S'. \text{ Por otra parte:}$$

$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, la velocidad de P c/r al sistema S

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}$$

Despejando u de esta ecuación

$$u' \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2}\right) = u - v,$$

$$\left(1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}\right)u = u' + v,$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$$

Esta es la ley de composición de velocidades. Es directo comprobar que si $u' = c$, $v = c \Rightarrow u = c$.

No es posible lograr velocidades mayores que la velocidad de la luz sumando velocidades con esta ecuación relativista.

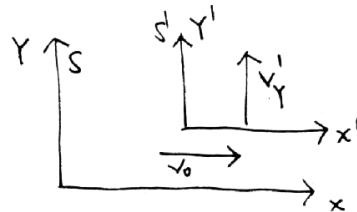
Velocidades Perpendiculares

Supongamos que el observador en S' se mueve en un eje perpendicular a la dirección de desplazamiento de los dos sistemas de referencia, digamos el eje y . La velocidad relativa, de acuerdo a un observador en S es:

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \left[\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right]},$$

dividiendo ambos factores por Δt y definiendo

$$v'_y \equiv \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \text{ y}$$



$v_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t}$, obtenemos:

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]} = \gamma v_y$$

Esta es la fórmula que relaciona una velocidad perpendicular a la dirección de movimiento en el sistema S' , con la velocidad medida desde el sistema de referencia en reposo.

El objetivo del siguiente ejemplo es recordar que cuando las mediciones se realizan en el mismo sistema de referencia, toda la cinemática y la geometría de un curso de Introducción a la Física son válidas. Sólo cuando queremos relacionar medidas en sistemas de referencia inerciales diferentes es necesario recurrir a las transformaciones de Lorentz y a la geometría del espaciotiempo.

Ejemplo

Analicemos el siguiente experimento desde el punto de vista de un observador en tierra (S) y el de otro observador viajando en una nave espacial (S'). En el sistema S' el astronauta envía un destello de un rayo láser contra un espejo situado en el eje y' , perpendicular a la velocidad relativa de la nave u . La distancia del origen de S' , O' al espejo superior es L .

Relacionando las mediciones efectuadas por ambos observadores y recordando que las mediciones en los ejes perpendiculares al movimiento permanecen inalteradas, obtenga la expresión para la dilatación del tiempo.

En el sistema del laboratorio, el destello parte de O' , rebota en L y vuelve a O' .

Utilizando el Postulado # 5, el largo L medido en ambos sistemas de referencia es el mismo porque es perpendicular a la dirección de movimiento. Por otra parte, cada uno de los pasos representados en la figura es un evento en el sistema de Laboratorio. Cuando sale el rayo (primera figura a la izquierda), cuando llega al espejo superior (figura del medio) y la posición del origen O' del sistema S' , son tres eventos referidos al sistema de Laboratorio. Con ellos podemos dibujar un triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras:

$$(u \Delta t_s)^2 + L^2 = (c \Delta t_s)^2,$$

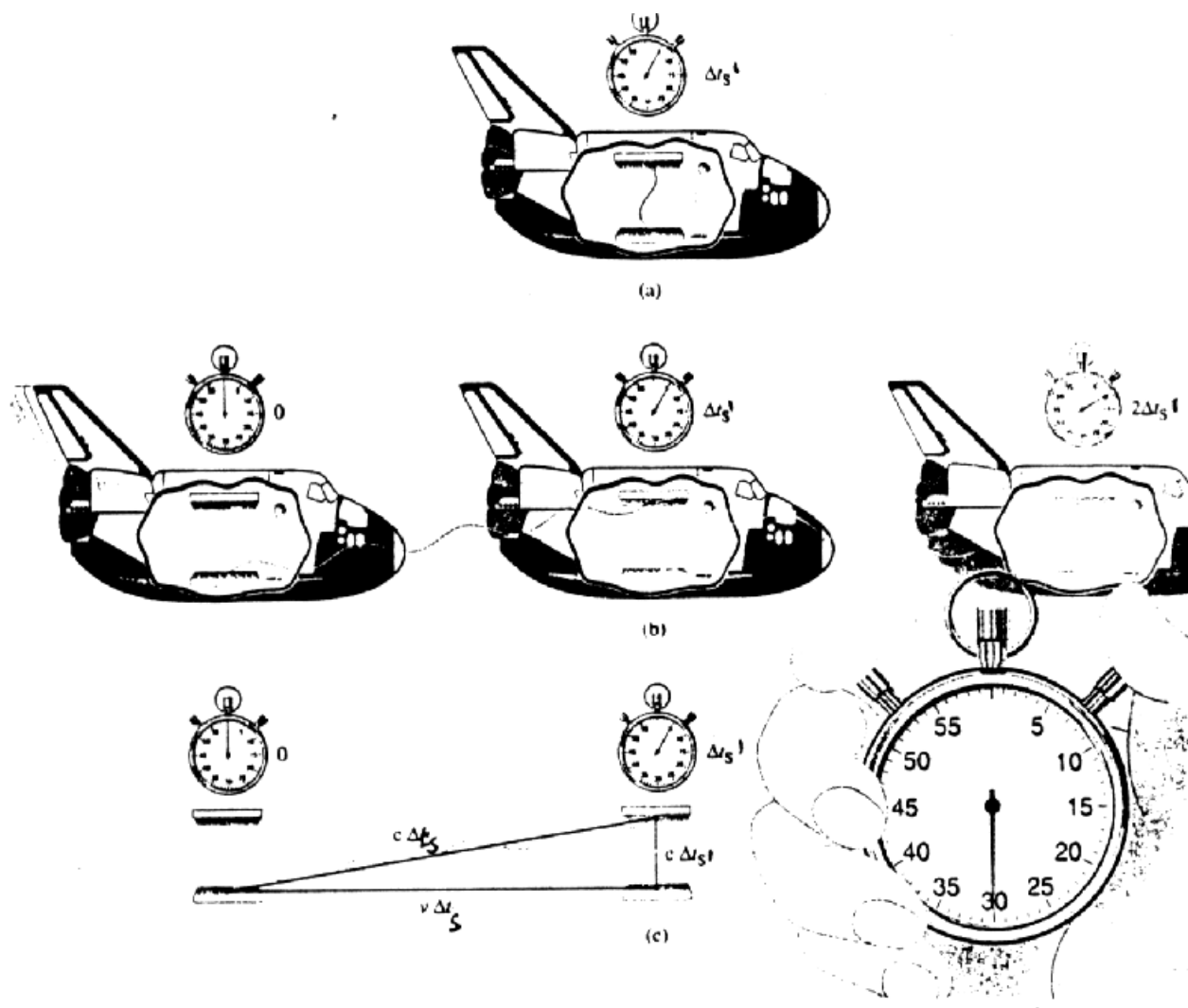


Figura VII.32: En el sistema S' , (cohete), el rayo sale y vuelve al origen después de rebotar en el espejo superior. El mismo fenómeno, observado en el sistema de Laboratorio se indica inmediatamente abajo del anterior.

donde $u \Delta t_s$ es la distancia que recorre la nave en el intervalo Δt_s , tiempo que tarda el rayo en ir desde la base al espejo superior de la nave medida en S . L es la distancia entre espejos en S' (que es la misma que en S) y $c \Delta t_s$ es la distancia que recorrió el rayo de luz de acuerdo a S .

Si consultamos al astronauta acerca del tiempo que empleó el rayo en ir desde el espejo inferior (origen O') hasta el espejo superior nos indica que es $\Delta t_{s'} = L/c$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior y despejando Δt_s en función de $\Delta t_{s'}$, tenemos:

$$\Delta t_{s'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Delta t_s, \quad \text{o bien} \quad \Delta t_s = \gamma \Delta t_{s'}$$

Conclusión : $\Delta t > \Delta t'$. El tiempo en S transcurre más rápido que en S' .

Ejemplo

Un sistema S' está en movimiento uniforme con respecto a otro, S . En S' se ubica una barra que forma un ángulo θ' con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuál es la dirección de la barra medida por un observador en S .

De la figura se obtiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \cot \theta'$$

Usamos esta relación porque $\Delta y'$ es perpendicular al movimiento y por el Postulado # 5 : $\Delta y' = \Delta y$.

Cualquier diferencia en el valor del ángulo que aparezca en S proviene de la relación entre $\Delta x'$ y Δx . Gráficamente lo que mide S se ve en la figura VII.33:

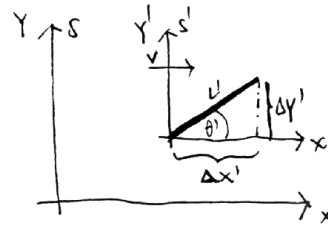


Figura VII.33: .

Coordenada de A :

$$x'_A = \gamma x_A \quad (\text{puesto que } \Delta t = 0 \text{ en } S)$$

$$x'_A \equiv x'_c \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x$$

Universidad de Chile

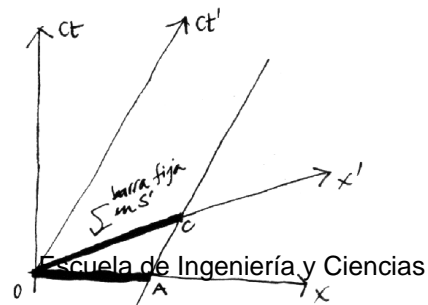


Figura VII.34: La figura señala lo que mide el observador S y S' .

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x'}{\gamma \Delta y'} = \frac{1}{\gamma} \cot \theta'$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \cot \theta$$

$$\cot \theta = \sqrt{1 - \beta^2} \cot \theta'$$

Ejemplo

Si observamos una estrella fija desde la Tierra, debemos inclinar la orientación del telescopio debido al movimiento relativo de la Tierra con respecto a la estrella. Este fenómeno se denomina *aberración de la luz* y consiste en el cambio de dirección de la propagación de la luz, al pasar de un sistema en reposo a otro en movimiento relativo, si el ángulo de incidencia no es paralelo a la velocidad relativa entre los sistemas de referencia.

Calcule la inclinación θ' con que debe posicionarse el telescopio, de acuerdo a la Figura, en los dos casos siguientes:

a) Calcule el valor del ángulo θ' , en la forma clásica, es decir sin usar relatividad especial.

b) Desarrolle el cálculo del ángulo θ' en forma relativista y compare este resultado con el anterior.

a) Como la Tierra se está acercando a la estrella, de acuerdo al esquema indicado, la velocidad relativa *aumenta* $u + c \sin \theta$, recordemos que no estamos utilizando la relatividad especial.

$$\tan \theta' = \frac{u + c \sin \theta}{c \cos \theta}$$

$$\tan \theta' = \left[\tan \theta + \frac{u}{c \cos \theta} \right]$$

En forma no-relativista las velocidades se suman en forma usual.

Como la luz - de acuerdo a la figura - va al encuentro del sistema de referencia, la velocidad relativa aumenta.

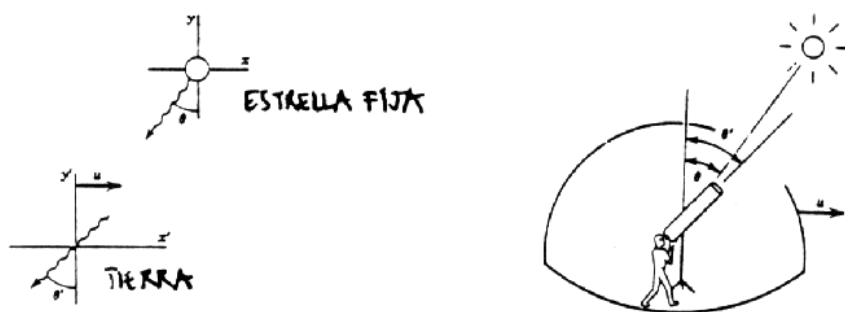


Figura VII.35: A la izquierda aparecen los dos sistemas de referencia que están en movimiento relativo. A la derecha se da una idea del cambio de dirección que se le debe dar al telescopio para enfocar la estrella fija (sin movimiento propio).

$$v'_x = -c \cos \theta$$

$$v'_y = -(u + c \sin \theta)$$

b) Ahora procedemos con el formalismo relativista.

De acuerdo a las fórmulas dadas

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left[1 - \frac{u v_x}{c^2} \right]}$$

$$v_x = -c \sin \theta \quad v_y = -c \cos \theta$$

$$v'_x = -\frac{[c \sin \theta + u]}{1 + \frac{u \sin \theta}{c}} \quad v'_y = -\frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{u \sin \theta}{c} \right]}$$

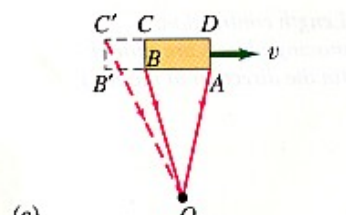
$$\tan \theta' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u + c \sin \theta}{1 + \frac{u \sin \theta}{c}} \times \frac{1}{\left\{ \frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{u \sin \theta}{c} \right]} \right\}}$$

$$\tan \theta' = \gamma \frac{u + c \sin \theta}{c \cos \theta} = \gamma \left[\tan \theta + \frac{u}{c \cos \theta} \right]$$

Universidad de Chile



Escuela de Ingeniería y Ciencias



La diferencia con el tratamiento no-relativista es un factor γ en frente de toda la expresión.

Ejemplo

Explique si la figura que se acompaña es correcta o no. Justifique su respuesta.

Un par de comentarios finales con respecto al tiempo. Es la variable que se puede determinar con mayor precisión. Esta es una ventaja técnica, que nos permite hacer experimentos y confrontarlos con predicciones bien precisas, como ya lo describimos anteriormente.

Por otra parte, utilizando las palabras de Penrose [3]: "...la relatividad especial nos enseña algo profundo acerca de la realidad física, en relación a la naturaleza del tiempo".

Una de estas enseñanzas –como hemos visto–, se refiere al cambio en el concepto de simultaneidad, dos fenómenos A y B que ocurren al mismo tiempo en un sistema de referencia, de acuerdo a otro observador que viaja con una velocidad v , constante, con respecto al anterior, A ocurre antes que B . El concepto de simultaneidad deja de ser absoluto.

VII.5. Dinámica Relativista.

En esta sección definiremos la velocidad en 4 dimensiones y a partir de ella el momentum usando análisis dimensional. También justificaremos la expresión obtenida para el 4-momentum recurriendo al Principio Variacional usado para obtener las ecuaciones de movimiento en la mecánica de Newton.

En ambos casos debemos recordar que las expresiones relativistas obtenidas por cualquiera de los dos métodos, deben tener como caso límite la forma usual de la mecánica de Newton cuando las velocidades de las partículas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

VII.5.1. La Cuadrivelocidad.

Lo que nos interesa ahora es aplicar este método a la velocidad en relatividad especial. Las transformaciones de inter'es, en este caso, son las transformaciones de Lorentz. Para que un objeto de 4 componentes sea cuadvivector, debe transformar igual que las coordenadas x^μ al efectuar un cambio de sistema de referencia, puesto que nos interesa que las leyes físicas tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales. Queremos escribir las leyes en forma covariante; que tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales.

Al intentar resolver un problema espec'ífico, seleccionamos el sistema de referencia que juzgamos más adecuado, y sabemos que las leyes tienen la misma expresi'on formal en ese sistema como en cualquier otro inercial.

Si queremos cambiar de sistema de referencia, usamos las transformaciones de Lorentz, puesto que todas las cantidades usadas deben ser cuadvivectores y por lo tanto obedecen la misma ley de transformación.

Entonces:

$$d\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{VII.9})$$

donde Λ es la matriz que representa a la transformación de Lorentz.

$$\begin{bmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} \\ d\bar{y} \\ d\bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Figura VII.37:

¿Cómo definimos la cuadrivelocidad? Si ya sabemos que Δx^u transforma como un cuadvectores, tal como en la definición anterior, entonces para definir la cuadrivelocidad debemos dividir esta cantidad por un *invariante*: una cantidad que tenga el mismo valor en ambos sistemas de referencia inerciales, en analogía con lo realizado en la mecánica Newtoniana.

Ya conocemos una cantidad, que cumple con esta propiedad: precisamente el elemento de longitud en 4 dimensiones.

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 - d\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, definida junto con la transformación de Lorentz en una dimensión espacial:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Como $ds' = ds$, podemos dividir ambos lados de la ecuación y obtener la cuadrivelocidad:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (\text{VII.10})$$

Las propiedades de transformación de u^μ son las esperadas

$$\bar{u}^\mu \equiv \frac{d\bar{x}^\mu}{ds} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (\text{VII.11})$$

Si una partícula permanece en reposo en el sistema de referencia que estamos usando entonces $d\vec{x} = 0$. y u^μ toma la siguiente forma (escrita en forma horizontal para ahorrar espacio)

$$u^\mu = \left[\frac{cdt}{cdt}, 0, 0, 0 \right] = [1, 0, 0, 0].$$

Ahora, si la partícula se desplaza en el sistema de referencia que estamos usando, entonces podemos factorizar el tiempo a partir de la expresión de ds^2 , para que la cuadrivelocidad se asemeje lo más posible a la expresión usual de la velocidad.

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 [1 - [dx/(cdt)]^2], \quad (\text{VII.12})$$

pero dx/dt es la velocidad de la partícula con respecto al sistema de referencia elegido en la dirección x . Análogamente con el resto de las coordenadas, de forma que la expresión anterior se transforma en:

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 [1 - \vec{v}^2/c^2], \quad (\text{VII.13})$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula. Tomando la componente positiva de la raíz cuadrada de esta expresión y recordando la definición de β y γ podemos escribir la cuadrivelocidad de la siguiente forma:

$$u^\mu = [\gamma, \vec{\beta}\gamma]. \quad (\text{VII.14})$$

Note que la expresión obtenida no tiene dimensiones.

Receta para subir y bajar 'índices

Los 'índices superiores identifican a un vector u^μ (o tensor si hay m'as de un 'índice $F^{\mu\nu}$) *contravariante*. Si figura como sub'índice u_μ , se denomina *covariante*.

Cada una de estas cantidades tiene un significado geométrico bien determinado pero aquí sólo nos interesa dar una receta que nos indique cómo subir o bajar 'índices.

Primero debemos definir la matriz inversa de la métrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar tiene exactamente la misma expresión de la métrica de Minkowski.

Para subir un 'índice, es decir transformarlo de covariante en contravariante basta multiplicar por la métrica inversa de Minkowski:

$$u^\mu = \eta^{\mu\alpha} u_\alpha, \text{ análogamente } u_\mu = \eta_{\mu\alpha} u^\alpha.$$

La métrica de Minkowski (o su inversa) se utiliza para bajar (o subir) 'índices.

Ejemplo

Encuentre la expresi'ón asociada a la transformaci'ón de Lorentz, con los dos 'índices arriba (dos veces contravariante) o los dos 'índices abajo (dos veces covariante).

La Transformaci'ón de Lorentz definida anteriormente es una vez covariante y una vez contravariante: tien un 'índice superior y uno inferior.

$$\Lambda^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos sumado sobre el 'índice α . An'alogamente:

$$\Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Clasificaci'ón de los cuadri-vectores

Dados dos cuadvectores cualquiera A^{μ} y B^{ν} , mediante la m'etrica de Minkowski podemos definir un n'úmero a partir de ellos, de la siguiente forma:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \equiv A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu}$$

La expresi'ón a la derecha de la ecuaci'ón es un n'úmero, puesto que proviene de la suma de cada una de las componentes.

El caso m'as interesante es aquel en el cual usamos el mismo vector dos veces:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = A^0 A^0 - A^1 A^1 - A^2 A^2 - A^3 A^3 \equiv A^{\mu} A_{\mu} \equiv A_{\mu} A^{\mu}$$

Ahora, mediante esta operaci'ón podemos asociar un n'úmero a este vector:

Si $A_{\mu} A^{\mu} > 0 \Rightarrow$ cuadvector tipo **tiempo**

Si $A_{\mu} A^{\mu} = 0 \Rightarrow$ cuadvector tipo **luz**

Si $A_{\mu} A^{\mu} < 0 \Rightarrow$ cuadvector tipo **espacio**

De esta forma podemos clasificar a los cuadvectores; puesto que el signo y el valor de esta cantidad $A_\mu A^\mu$, es un invariante: vale lo mismo en todos los sistemas inerciales.

El significado físico de esta cantidad es el siguiente: si un cuadvector es *tipo tiempo*, indica que es un vector que está contenido dentro del cono de luz. Por ejemplo si el cuadvector representa a la cuadrivelocidad de una partícula, ésta se desplaza con velocidades menores que la velocidad de la luz. En cualquier otro sistema de referencia inercial, se cumple la misma condición.

Si la partícula es *tipo luz*, el vector se apoya en el manto del cono de luz. Finalmente si el vector es *tipo espacio*, indica que el vector se ubica fuera del cono de luz.

La cuadri-aceleración

Ahora procedemos a determinar la cuadriaceleración. Recordemos que a partir de nuestra definición de la cuadrivelocidad, tenemos:

$$u^\mu u_\mu = +1. \quad (\text{VII.15})$$

De aquí derivando con respecto a ds :

$$\frac{d u^\mu}{d s} u_\mu + u^\mu \frac{d u_\mu}{d s} = 0. \quad (\text{VII.16})$$

Definiendo la cuadriaceleración $a^\mu \equiv \frac{d u^\mu}{d s}$, y en forma similar a_μ ,

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0, \quad (\text{VII.17})$$

después de subir y bajar índices con la receta usual, se obtiene:

$$a^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{VII.18})$$

Ejercicio

Encontrar la expresión de a^μ como función de γ , $\vec{\beta}$ y $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

VII.5.2. El cuádrimomentum

Usando los resultados de la sección anterior, podemos definir el cuádrimomentum P^μ , como

$$P^\mu = \left(\frac{m_o c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, m_o c \gamma \vec{\beta} \right) = m_o c (\gamma, \gamma \vec{\beta}), \quad (\text{VII.19})$$

introduciendo la expresión de u^μ ,

$$P^\mu = m_o c u^\mu. \quad (\text{VII.20})$$

Como u^μ es un cuádrivector, P^μ también lo es.

El factor $(m_o c)$ aparece por razones dimensionales, el cuádrivector u^μ , no tiene dimensiones. La primera componente del cuádrivector momentum P^μ se define como la energía asociada a la partícula. Las otras tres componentes constituyen el vector momento, es decir, éstas son las componentes que en un régimen no relativista se transformarán en el momentum usual de la mecánica Newtoniana.

Mencionamos que los invariantes son importantes puesto que toman el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas. Calculemos el invariante obtenido a partir del cuádrimomentum.

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{\mathbf{P}} \right) \quad (\text{VII.21})$$

$$P^\mu P_\mu = (m_o c)^2 u^\mu u_\mu = (m_o c)^2 \quad (\text{VII.22})$$

$$P^\mu P_\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{\mathbf{P}}^2 = m_o^2 c^2 \quad (\text{VII.23})$$

En un sistema en que la partícula se encuentre en reposo, $\vec{\mathbf{P}} = 0$, y por lo tanto la energía toma el valor conocido

$$E = m_o c^2 \quad (\text{VII.24})$$

Otra consecuencia de este cálculo es que la definición de masa en reposo está bien definida: es proporcional al valor del invariante $P^\mu P_\mu$, por lo tanto es un número que no depende del sistema de referencia utilizado.

VII.5.3. La Conservación del Momentum.

Continuando con la generalización de las cantidades que aparecen en la mecánica usual de Newton, nos queda por definir la cuadrifuerza. Se define a partir del cuádrimomentum en la forma que se indica a continuación:

$$F^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{ds}. \quad (\text{VII.25})$$

Si **no** hay fuerzas externas actuando sobre el sistema de partículas que estamos estudiando, entonces $F^\mu = 0$ y en un choque entre partículas ocurre que

$$P^\mu_{Total} = \text{Constante}. \quad (\text{VII.26})$$

Como el cuádrimomentum se conserva, cada una de sus componentes se conserva, toma el mismo valor antes y después del choque.

$$P^o_{\text{antes}} = P^o_{\text{después}} \rightarrow \text{la energía se conserva.} \quad (\text{VII.27})$$

$$\vec{P}_{\text{antes}} = \vec{P}_{\text{después}} \rightarrow \text{el momento se conserva.} \quad (\text{VII.28})$$

Una de las consecuencias de la conservación del 4 - momento p^μ es que la masa y la energía no sean independientes como ocurría en la mecánica de Newton. La ley de conservación de la masa y la ley de conservación de la energía se vuelven una sola en el contexto de la Relatividad Especial.

En relatividad Especial las ecuaciones son cuatro:

$$\begin{aligned} P^o_{\text{inic}} &= P^o_{\text{final}} && (\text{conservación de masa y energía}) \\ \vec{P}_{\text{inic}} &= \vec{P}_{\text{final}} && (3 \text{ ecuación, conservación del momentum}) \end{aligned}$$

Transformación de masa en energía

Supongamos que una masa M , inicialmente en reposo se divide en dos partículas idénticas.

Utilizando el invariante

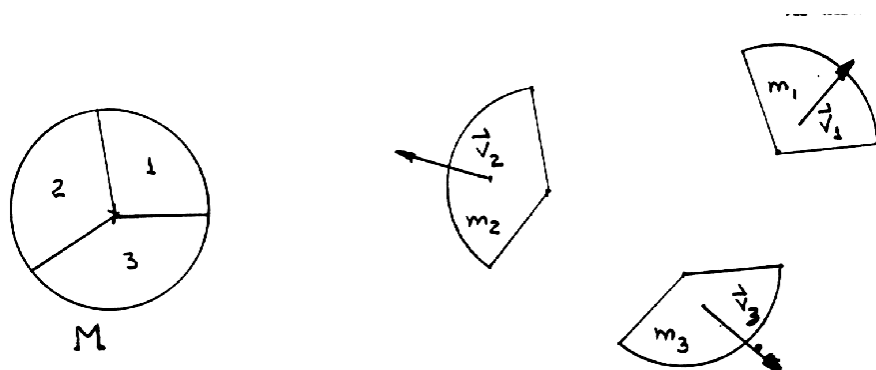
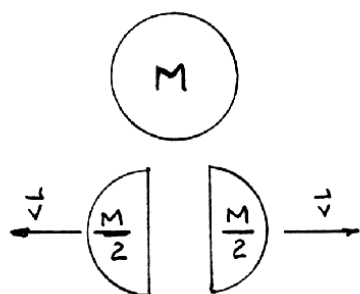


Figura VII.38: En la mecánica de Newton ocurre que: $M = m_1 + m_2 + m_3$, $p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ y $E_i = E_f$, $E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$. Estas 5 ecuaciones se transforman en 4 ecuaciones en la relatividad especial.

$$P_{\mu}^{inic} P^{\mu}_{inic} = P_{\mu}^{fin} P^{\mu}_{fin}$$

tenemos

$$\begin{aligned} P_{\text{inicial}}^{\mu} &= \{M c, \vec{0}\} \\ P_{\text{final}}^{\mu} &= \{(m_1 + m_2) c \gamma, \gamma m_1 \vec{v}_1 - \gamma m_2 \vec{v}_2\} \end{aligned}$$



Si ambos trozos 1 y 2 son idénticos $m_1 = m_2$, entonces

$$P_{\text{final}}^{\mu} = \{2mc\gamma, \vec{0}\}, \quad \text{puesto que } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0. \text{ Además}$$

$$P_{\text{inic}}^{\mu} P_{\mu}^{inic} = M^2 c^2 = m^2 c^2 \gamma^2 = P_{\text{final}}^{\mu} P_{\mu}^{final}$$

De aquí tenemos

$$M = 2m\gamma, \quad \text{como} \quad \gamma \geq 1,$$

entonces $M > 2m$. La masa no se conserva. Parte de la masa inicial se transformó en energía. Con el objeto de hacer una analogía con la mecánica de Newton, afirmamos que la masa se convirtió en energía cinética. Definimos la energía cinética como:

$$T \equiv E - E_o, \quad (\text{VII.29})$$

donde E_o proviene del invariante $P^\mu P_\mu$

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E_o^2}{c^2}, \quad \text{con } p = \gamma m v. \\ E &= \sqrt{E_o^2 + p^2 c^2} \\ T &\equiv \sqrt{E_o^2 + p^2 c^2} - E_o. \end{aligned}$$

Otra forma que puede adoptar este resultado, se obtiene desarrollando γ en serie de potencias de $(v/c)^2$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2 \\ T &= m c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 \mp \dots \right\} - m c^2 \\ T &\equiv \text{Energía Cinética Relativista} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3m}{8} \left(\frac{v^4}{c^2} \right) \mp \dots \end{aligned}$$

Este es el valor de la energía cinética para cada partícula m . Para comparar con el valor inicial M

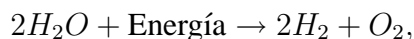
$$2T = 2m\gamma c^2 - 2mc^2 = (M - 2m)c^2,$$

la diferencia de masa se transformó en energía cinética.

La ley de conservación de masa de Lavoisier no es exacta. Claro está que la diferencia entre la masa inicial y final es, en la mayoría de los casos, despreciable.

La energía se transforma en masa

En la reacción

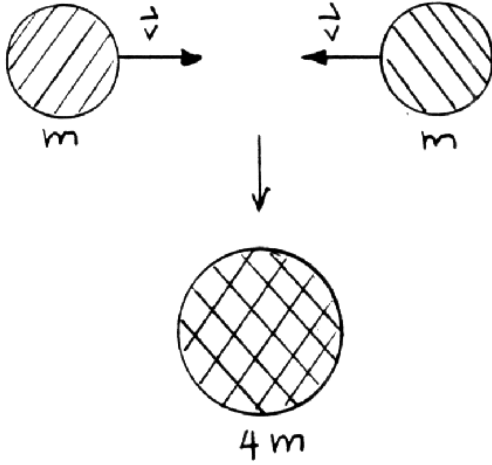


la energía añadida al agua se convierte en masa. En 1000 toneladas de agua convertida a hidrógeno y oxígeno, estos productos gaseosos tienen alrededor de 0,3 gramos de masa en exceso del original.

Ejemplo

- a) Suponga que dos masas iguales chocan frontalmente para producir una sola partícula de masa en reposo $4m$.
- b) El mismo caso anterior, pero ahora una de las partículas está en reposo en el Laboratorio y la otra choca frontalmente. Calcule la energía de la partícula incidente.
- a) Utilicemos los invariantes

$$\begin{aligned}
 P_{in}^\mu P_{\mu}^{in} &= P_{fin}^\mu P_{\mu}^{fin} \\
 P_{in}^\mu &= \left(2\frac{E_i}{c}, P_1 + P_2 \right), \\
 \text{pero } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= 0, \text{ luego :} \\
 \frac{2E_i^2}{c^2} &= \frac{E_f^2}{c^2} \\
 E_i &= m \gamma \\
 E_f &= 4m \\
 2m\gamma &= 4m \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0,87c
 \end{aligned}$$



Ambas partículas deben aproximarse con la velocidad $v = 0,87c$

- b) En el segundo caso, la partícula de masa $4m$ no puede estar en reposo, de esta forma

$$\left(\frac{E_1}{c} + mc\right)^2 - P_1^2 = \left(\frac{E_f}{c}\right)^2 - P_f^2$$

como $P_1 = \gamma mv$, $E_1 = mc\gamma$, entonces

$$(mc)^2(\gamma_i + 1)^2 - \gamma_i^2 mv^2 = (4\gamma_f mc)^2 - (4m\gamma_f v_f)^2$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{v_i}{c})^2}}, \quad \gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{v_f}{c})^2}}$$

$$(mc)^2 + 2(mc)^2\gamma_i + \gamma_i^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right) = 16\gamma_f^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v_f^2}{c^2}\right)$$

$$2(mc)^2(1 + \gamma_i) = 16m^1 c^2, \quad \text{de aquí se obtiene } \gamma_i = 7, \quad \Rightarrow \quad v_i \simeq 0,99 c.$$

En este caso, bombardear una partícula contra un blanco en reposo, se necesita una cantidad apreciablemente mayor de energía que el caso anterior. Es por esta razón que los aceleradores modernos utilizan haces de partículas que chocan frontalmente para producir como partículas más masivas.

Por ejemplo, el descubrimiento del bosón Z , que era una predicción de la teoría de Weinberg, Salam y Glashow y que les valió el premio Nobel en 1979, tiene una masa mil veces mayor que la de un átomo.

La partícula Z se produce en los aceleradores a partir del choque de dos partículas y la masa de la partícula Z es 100.000 veces mayor que la masa de cada una de las partículas incidentes.

Esta partícula fue detectada en Enero de 1983. Para tener una idea de la magnitud del acelerador, éste contiene un magneto de 800 toneladas para producir un campo magnético de 0.7 Tesla.

Ejemplo

Un carro rueda sobre una larga mesa con velocidad v . Un carro un poco más pequeño rueda sobre el primer carro con velocidad relativa al primer carro v . Un tercer carro rueda sobre el anterior con la misma velocidad v con respecto al segundo carro.

- ¿Cuál es la velocidad del tercer carro con respecto a la mesa en reposo?
- Suponga que el proceso se repite hasta infinito, ¿cuál es la velocidad del carro n -ésimo con respecto a la mesa?

- A partir de las transformaciones de Lorentz, tenemos

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \frac{\Delta x'}{\Delta t'} &= \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) - v}{1 - \frac{v}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} \\ u' &= \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad \text{o} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad \text{donde,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u' &\equiv \text{velocidad del carro con respecto al sistema } S'. \\ u &\equiv \text{velocidad del carro con respecto al sistema } S.\end{aligned}$$

En nuestro caso, el carro se desplaza con rapidez $u' = v$, con respecto a S' , entonces

$$u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Para mayor comodidad redefinimos la velocidad en unidades de la velocidad de la luz

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

de este modo, haciendo $c=1$, se tiene $u = \frac{u'+v}{1+u'v}$ y como $u' = v \Rightarrow u = \frac{2v}{1+v^2}$.

- b) Si aumentamos el número de sistemas de referencia en una unidad, tenemos que u' no es v sino $u' = \frac{2v}{1+v^2}$ por el resultado de la parte a)

$u \equiv$ velocidad del carro con respecto a S
 $u' \equiv$ velocidad del carro con respecto a S'

$$u = \frac{\frac{2v}{1+v^2} + v}{1 + \frac{2v}{1+v^2} \cdot v} = \frac{3v + v^3}{1 + 3v^2}$$

Si sumamos un sistema de referencia adicional, tenemos:

$u' \equiv$ velocidad del carro con respecto al sistema S'

$$u' = \frac{3v + v^3}{1 + 3v^2}$$

$u \equiv$ velocidad del carro de la figura con respecto al sistema S'

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v} = \frac{4v + 4v^3}{1 + 6v^2 + v^4}$$

En este punto conviene hacer notar que:

$$\begin{aligned}
 (1 \pm v)^4 &= 1 \pm 4v + 6v^2 \pm 4v^3 + v^4 \\
 (1+v)^4 - (1-v)^4 &= 2(4v + 4v^3) \\
 (1+v)^4 + (1-v)^4 &= 2(1 + 6v^2 + v^4) \\
 u^{(4)} &= \frac{(1+v)^4 - (1-v)^4}{(1+v)^4 + (1-v)^4}
 \end{aligned}$$

Análogamente, el caso anterior

$$\begin{aligned}
 u^{(3)} &= \frac{(1+v)^3 - (1-v)^3}{(1+v)^3 + (1-v)^3}, \\
 u^{(2)} &= \frac{(1+v)^2 - (1-v)^2}{(1+v)^2 + (1-v)^2}.
 \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}
 u^{(n)} &= \frac{(1+v)^n - (1-v)^n}{(1+v)^n + (1-v)^n} \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^n}{1 + \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^n}
 \end{aligned}$$

Defino $x \equiv \frac{1-v}{1+v} < 1$, puesto que $v > 0$. Pero $x < 1, \Rightarrow x^n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, de este modo $u^{(n)} \rightarrow 1$ y como estamos utilizando la velocidad de la luz como unidad, tenemos

$$u^{(n)} \rightarrow c.$$

Ejemplo

Una cámara muy distante saca una fotografía de una bala viajando. Esta bala tiene una velocidad v y un largo ℓ , con respecto al sistema en reposo.

Detrás de la bala y paralelo a su camino se ubica una regla en reposo con respecto a la cámara.

La cámara hace un ángulo α con respecto a la velocidad de la regla.

¿Cuál será el largo aparente de la bala de acuerdo al sentido de la velocidad de la bala?

OJO: Ambos fotones deben llegar **simultáneamente** a la cámara, es decir no salen simultáneamente de la fuente.

Definamos $\ell \equiv$ largo de la bala en su sistema propio (medido por un observador moviéndose con ella: sistema S')

$L_{\square} \equiv$ largo de la bala medido en el sistema en reposo (S) con respecto a la cámara y a la regla.

$L \equiv$ longitud de la bala registrada por la foto.

Ambos fotones deben llegar simultáneamente a la cámara, de esta forma el fotón que sale de la cola de la bala debe hacerlo anticipadamente. De acuerdo a la figura debe recorrer una distancia adicional igual a : $L \cos \alpha$.

$$\Delta t = \frac{L \cos \alpha}{c}.$$

En este intervalo, la bala avanzó una distancia

$$v \Delta t = \frac{v}{c} L \cos \alpha$$

El largo que registra la cámara es

$$L = L_{\square} + \frac{v}{c} L \cos \alpha$$

donde L_{\square} es el largo de la bala según S y $\frac{v}{c} L \cos \alpha$ lo que avanzó entre los dos destellos.

$$L = \frac{L_{\square}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}$$

La relación entre L_{\square} y ℓ está dada por

$$\begin{aligned}\Delta x' &\equiv x'_A - x'_o = \gamma[(x_A - x_o) - v(t_3 - t_o)] \\ \Delta x' &= \gamma[L_{\square} - v \cdot o] \\ \Delta x' &= x'_A - x'_o = x'_B - x'_o = \ell\end{aligned}$$

puesto que $x'_B = x'_A$, entonces

$$\ell = \gamma L_{\square}$$

De modo que

$L \equiv$ Largo medido por la cámara

$$L = \frac{\ell}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)}$$

VII.5.4. Ley de Transformaciones de Vectores.

Las cantidades que tienen un significado f'ísico -aquellas que representan una observaci'on-, tienen existencia por s'í mismas, independientes del sistema de referencia utilizado. Por ejemplo, la fuerza, la velocidad...etc. no cambian al rotar el sistema de referencia, permanecen iguales y s'olo se altera el valor de sus coordenadas.

La segunda ley de Newton se escribe: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ y no se especifica la orientación del sistema de referencia. Nosotros seleccionamos uno, el más conveniente, y escribimos las ecuaciones en dicho sistema de referencia. Si posteriormente queremos cambiar de sistema de referencia a otro que forme un cierto ángulo con respecto al anterior, debemos usar las propiedades de transformación de los vectores y la ecuación queda escrita correctamente en el nuevo sistema de

Figura VII.39: En mecánica utilizamos cantidades como: escalares, vectores, pseudo-vectores, tensores...etc. El nombre de cada uno de estos objetos responde a las propiedades de transformación que obedece dicha cantidad al realizar una rotación del sistema de referencia o al reflejarlo en un espejo

referencia. Esta operación es correcta porque todas las cantidades que aparecen en la ecuación transforman de la misma forma bajo rotaciones, es decir son **vectores**.

Ejemplo

Estudiemos el caso de una rotación en un ángulo θ . Para preparar el camino a las transformaciones de Lorentz, incluiremos aquí el tiempo.

a) Escribir la rotación en forma matricial, incluyendo el tiempo.

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t, \\ x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y \cos \theta - x \sin \theta, \\ z \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma tensorial,

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=3} R^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (\text{VII.30})$$

Hemos introducido la matriz de rotación $R^\mu{}_\nu$. Esta matriz incluye la componente temporal, los índices μ y ν toman los valores 0, 1, 2 y 3. Es una matriz de 4×4 .

Convenci' on de Einstein

A continuación se define la convención de Einstein para las sumas. Consiste en omitir el símbolo de la sumatoria \sum y adoptar la convención siguiente: cada vez que aparezca un índice repetido, se debe sumar sobre todos los valores que toma dicho índice. En esta notación la expresión anterior se escribe

$$\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu x^\nu. \quad (\text{VII.31})$$

donde la matriz R^μ_ν tiene la siguiente forma

$$R^\mu_\nu = \begin{bmatrix} R^0_0 & R^0_1 & R^0_2 & R^0_3 \\ R^1_0 & R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ R^2_0 & R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ R^3_0 & R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Las velocidades deben transformar de la misma forma. Usando la forma tensorial definida en [VII.5.4], y diferenciando con respecto a x^ν (y manteniendo fijo el ángulo de rotación) tenemos que

$$\Delta \vec{x} \equiv \vec{X}_p - \vec{X}_q, \quad d\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{VII.32})$$

de aquí podemos encontrar la forma de la velocidad recordando que t toma el mismo valor en todos los sistemas de referencia. Sólo debemos dividir ambos miembros de la ecuación anterior por dt :

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = R^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{dt}, \quad \bar{V}^\mu = R^\mu_\nu V^\nu. \quad (\text{VII.33})$$

Es claro que esta expresión transforma igual que los vectores bajo una rotación, y por lo tanto es un vector.

Podemos seguir con este método y aplicarlo a la aceleración, y obtener un resultado similar: también es un vector, como uno supone.

Receta para subir y bajar índices

Los 'índices superiores identifican a un vector u^μ (o tensor si hay m'as de un 'índice $F^{\mu\nu}$) *contravariante*. Si figura como sub'índice u_μ , se denomina *covariante*.

Cada una de esats cantidades tiene un significado geom'etrico bien determinado pero aqu'i s'olo nos interesa dar una receta que nos indique c'omo subir o bajar 'índices.

Primero debemos definir la matriz inversa de la m'etrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar tiene excatamente la misma expresi'on de la m'etrica de Minkowski.

Para subir un 'índice, es decir transformarlo de covariante en contravariante basta multiplicar por la m'etrica inversa de Minkowski:

$$u^\mu = \eta^{\mu\alpha} u_\alpha, \text{ an'alógamente } u_\mu = \eta_{\mu\alpha} u^\alpha.$$

La m'etrica de Minkowski (o su inversa) se utiliza para bajar (o subir) 'índices.

Ejemplo

Encuentre la expresi'on asociada a la transformaci'on de Lorentz, con los dos 'índices arriba (dos veces contravariante) o los dos 'índices abajo (dos veces covariante).

La Transformaci'on de Lorentz definida anteriormente es una vez covariante y una vez contravariante: tien un 'índice superior y unoinferior.

$$\Lambda^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\nu} \Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos sumado sobre el índice α . Análogamente:

$$\Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La cuadri-aceleración

Ahora procedemos a determinar la cuadriaceleración. Recordemos que a partir de nuestra definición de la cuadvirvelocidad, tenemos:

$$u^\mu u_\mu = +1. \quad (\text{VII.34})$$

De aquí derivando con respecto a ds :

$$\frac{d u^\mu}{d s} u_\mu + u^\mu \frac{d u_\mu}{d s} = 0. \quad (\text{VII.35})$$

Definiendo la cuadriaceleración $a^\mu \equiv \frac{d u^\mu}{d s}$, y en forma similar a_μ ,

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0, \quad (\text{VII.36})$$

después de subir y bajar índices con la receta usual, se obtiene:

$$a^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{VII.37})$$

Ejercicio

Encontrar la expresión de a^μ como función de γ , $\vec{\beta}$ y $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

VII.5.5. Principio Variacional.

Encontraremos el momentum usando cálculo variacional, porque de allí calculando el Hamiltoniano encontraremos la expresión relativista de la energía.

$$S = \alpha \int L dt, \quad (\text{VII.38})$$

S es la acción y L es el Lagrangiano. La cantidad $L dt$ debe ser un *invariante relativista*, porque de esta forma, a través de este método, encontramos una ecuación de movimiento independiente del sistema de referencia (o mejor válida en cualquiera de ellos).

El invariante más simple es ds .

$$\begin{aligned} S &= \alpha \int ds = \alpha \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}, \\ &= \alpha c \int dt \sqrt{1 - \beta^2}, \\ &\simeq \alpha c \int dt (1 - \frac{1}{2} \beta^2), \quad \text{si } \beta^2 \ll 1. \end{aligned}$$

El objetivo de tomar la aproximación $\beta^2 \ll 1$ es determinar el valor de la constante α introducida al comienzo del cálculo a partir del límite no-relativista. Como este límite la fórmula relativista debe coincidir con la usual en mecánica, procedemos a ajustar la constante α para que el lagrangiano tome la expresión: $L = T - V$. En nuestro caso $V = 0$, puesto que no hay fuerzas. De este modo:

$$ds = \alpha c dt - \frac{\alpha v^2}{2c} dt \Rightarrow \alpha = -m_o c,$$

m_o se define como la masa de la partícula medida en un sistema en reposo con respecto a ella. La acción es:

$$S = -m_o c^2 \int dt + \int \frac{m_o v^2}{2} dt \quad (\text{VII.39})$$

el primer término $-m_o c^2 \int dt$ no afecta las ecuaciones de movimiento por ser una constante: se cancela al tomar la variación del Lagrangiano con extremos fijos.

Se introdujo una constante m_o , que llamaremos $m_o \equiv$ masa en reposo de la partícula.

$$\begin{aligned} S &= \int (-m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2}) dt \\ L &= L(v) \end{aligned} \quad (\text{VII.40})$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos definir, en forma canónica, el momentum asociado a una partícula.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v} \\ \vec{\mathbf{P}} &= \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v} = m_o \gamma \vec{v}\end{aligned}\quad (\text{VII.41})$$

La componente temporal del 4-vector momentum, P^0 , se define a partir del Hamiltoniano.

$$\begin{aligned}H &\equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_o c^2 \sqrt{1-\beta^2}, \\ H &= \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}$$

El hamiltoniano H representa la **energía** total de la partícula, como puede comprobarse en el caso no-relativista. Definimos la energía $E = H$

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{VII.42})$$

En la siguiente sección definimos el cuádrimomentum.

Note que, de acuerdo a lo establecido al comienzo de esta sección de cuádrivectores, son las propiedades de transformación las que determinan cuando un cuádrivector está bien definido o no. Si la asociación que aquí definimos es compatible con las transformaciones de Lorentz entonces está correcta.

VII.6. Confirmación experimental de la relatividad especial

Experimento de R. F. C. Vessot

A continuación describiremos un experimento realizado en 1980, con el objeto de comprobar las predicciones de la teoría de la relatividad general y especial [?],

usando un reloj atómico. El acuerdo entre teoría y experimento que se verificó en este caso lo interpretaremos como una confirmación de que la naturaleza se ajusta, dentro de las aproximaciones usadas, a sus postulados. No existe, hasta el momento, un experimento que contradiga las predicciones sostenidas por la relatividad especial. Este hecho constituye una buena justificación para estudiarlas.

El experimento se realizó dentro de un cohete *Scout* que fue enviado a 10.000 km. de altura con un reloj atómico en su interior. Este reloj es en realidad un *Maser*: acrónimo de **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation, o Amplificación de micro-ondas mediante emisión estimulada de radiación, emite una onda cuya frecuencia f_o es de 1420,405751 Mhz, y permanece sin cambiar por un período de 100 segundos. Esta señal llega a tierra con una frecuencia ν y es comparada con la emitida por un reloj similar instalado en el lugar de recepción en tierra. Las variaciones porcentuales de frecuencia entre ambos relojes

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_o} \equiv \frac{\nu - \nu_o}{\nu_o},$$

están dadas, de acuerdo a las predicciones de la relatividad general, por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_o} = \frac{\varphi_t - \varphi_S}{c^2} - \frac{|\vec{V}_t - \vec{V}_S|^2}{2c^2} - \frac{\vec{r}_{S-t} \cdot \vec{a}_t}{c^2}. \quad (\text{VII.43})$$

El subíndice t indica *tierra* y S el cohete *Scout*. φ indica el potencial gravitacional Newtoniano en la superficie de la tierra y en la posición del cohete, de acuerdo al subíndice. Esta corrección es un efecto neto de la relatividad general: el tiempo transcurre más rápidamente en los puntos o regiones donde el potencial gravitacional es más débil. El segundo término corresponde al efecto Doppler de segundo orden, debido a la velocidad relativa entre el cohete y la base en tierra. El efecto Doppler de primer orden, proporcional a V/c , se elimina rebotando en el cohete una señal adicional de frecuencia conocida y comparándola con la frecuencia que retorna. Es un efecto similar al radar que la policía usa para medir la velocidad.

El tercer término de la fórmula VII.43 proviene de la aceleración que experimenta el cohete, y r_{S-t} , indica la distancia desde el cohete al centro de la tierra.

La ecuación VII.43 constituye la predicción teórica.

Al comparar las frecuencias recibidas desde la nave con las del reloj en la base y corregir los datos para tomar en cuenta un conjunto de factores mencionados a

Figura VII.40: Esquema del experimento realizado con el cohete *Scout*.

continuación, se llegó a la conclusión que la teoría de la relatividad (especial y general) y el experimento son consistentes a un nivel de precisión de 70 partes en 10^{-6} .

Algunos de los efectos que debieron ser tomados en cuenta para eliminar los errores de los datos obtenidos, fueron: campos magnéticos variables en magnitud y dirección, rotación de la última etapa del cohete, variaciones de la presión barométrica y temperatura. Otros efectos adicionales son la aceleración de aproximadamente $18g$ a la que está sometido el cohete durante su lanzamiento y la dispersión en la señal debido a la columna de electrones de la ionósfera que se interpone entre la nave y la base.

En este experimento no es posible distinguir entre los efectos cinemáticos proporcionales a potencias de V/c , de los dinámicos, que son generados por la relatividad general (proporcionales al potencial gravitacional). Esto debido a que el cohete Scout, varía constantemente su altura y velocidad durante el corto tiempo que dura el experimento.

Experimento Hafele y Keating

(J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.)

Este experimento consiste en ubicar cuatro relojes atómicos de Cesio en el interior de un avión que fueron trasladados en un vuelo regular de una línea comercial de aviación alrededor del mundo dos veces consecutivas: una en dirección Este y la otra hacia el Oeste. El experimento fue realizado por J.C. Hafele y R. E. Keating en 1972, y su objetivo fue poner a prueba la teoría de la relatividad de Einstein utilizando relojes macroscópicos.

Como veremos después, la razón entre los tiempos registrados por un reloj en Tierra y otro en movimiento, pero con una velocidad baja ($u^2 \ll c^2$) se reduce a $[1 - u^2/(2c^2)]$, donde c es la velocidad de la luz. Como en este caso la Tierra está rotando los relojes estándar distribuidos sobre la superficie no pueden ser utilizados como relojes coordinados en un sistema inercial. De todas maneras pueden ser evaluados con respecto a un hipotético reloj ubicado en el Polo Norte (o Sur). En este caso al comparar ambos relojes, el reloj de referencia ubicado en el Polo observa que el localizado en el Ecuador con una velocidad $R\Omega$, y de esta forma mide un retraso en su medición:

$$1 - \frac{R^2 \Omega^2}{2c^2}, \quad \text{donde } R \text{ es el radio de la Tierra y } \Omega,$$

es su velocidad angular. Por otra parte la nave que circun-navega la Tierra cerca del plano ecuatorial con una velocidad ν relativa a la Tierra, experimenta un retraso proporcional a

$$1 - \frac{(R\Omega + \nu)^2}{2c^2}.$$

Por lo tanto si τ y τ_o son los tiempos registrados por el reloj en el avión y en Tierra respectivamente durante una circunvalación completa, su diferencia, en primera aproximación está dada por:

$$\tau - \tau_o = -\frac{2R\Omega\nu + \nu^2}{2c^2} \tau_o.$$

En consecuencia, si la nave viaja en el mismo sentido de rotación de la Tierra (Este, $\nu > 0$) debería producir un retraso en el tiempo indicado en el reloj de la nave. De la misma manera, un viaje contra el sentido de rotación de la Tierra (Oeste $\nu < 0$) debería producir un adelanto en el tiempo de la nave si $\nu \approx R\Omega$.

La relatividad general predice un efecto adicional que, en el caso de campos gravitacionales débiles es proporcional a la diferencia en el potencial gravitacional entre la nave y el reloj en Tierra. Si el valor de la aceleración de gravedad es g y la altura que alcanza la nave es $h \ll R$, la diferencia de potencial es gh . Al introducir este nuevo elemento en la ecuación que relaciona los tiempos relativos, se obtiene:

$$\tau - \tau_o = \left[\frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega\nu + \nu^2}{2c^2} \right] \tau_o.$$

El término gh/c^2 se denomina el *corrimiento al rojo gravitacional*, y predice un aumento en el tiempo de los relojes ubicados sobre el nivel de la Tierra.

Para las velocidades y alturas típicas que alcanzan las aeronaves, ambos términos de esta última ecuación: el gravitacional y el cinemático son comparables en magnitud absoluta. El término $\nu^2/(2c^2)$ es pequeño comparado con $R\Omega\nu/c^2$. De esta forma en el viaje hacia el Oeste ($\nu < 0$) ambos términos son positivos y se suman para una ganancia neta apreciable en los tiempos medidos. En el viaje hacia el Este ($\nu > 0$), tienden a cancelarse y a producir una diferencia neta pequeña.

Podemos comparar las diferencias de tiempo obtenidas a partir de la última fórmula y comparar con los límites de detección de los instrumentos. De hecho, este experimento fue posible debido notable disminución en el tamaño asociado a los relojes atómicos y, por supuesto, su exactitud.

El viaje lo suponemos sin escalas y, en una primera aproximación, el tiempo empleado es $\tau_o = 2\pi R\nu$. Sustituyendo este valor en la ecuación tenemos:

$$\tau - \tau_o = \left[\frac{2\pi Rgh}{c^2|\nu|} - \frac{2R\Omega\nu}{|\nu|} - \frac{|\nu|}{2} \right]$$

Teoría	Este	40 ± 23 nanosegundos
	Oeste	275 ± 21 nanosegundos
Experimento	Este	59 ± 10 nanosegundos
	Oeste	273 ± 7 nanosegundos

Estos resultados proporcionan un respaldo concreto a las predicciones de la teoría de la relatividad especial. La paradoja del reloj, que analizaremos más adelante, se comprueba aquí con el uso de relojes macroscópicos.

Anteriormente se conocía este resultado por el decaimiento de partículas elementales (ver ejemplo). En este último caso, la verificación es a nivel microscópico.

VII.6.1. Resumen

Hemos descrito un par de experimentos que confirman las predicciones deducidas a partir de la teoría de la relatividad especial y general hace ya más de 70 años. El error en uno de estos experimentos confirma la teoría con una precisión de 70 partes por millón (70 ppm).

Aún así no es posible afirmar que, una de ellas, la relatividad general es la teoría que describe correctamente el fenómeno de gravitación. La razón es la siguiente: estos experimentos fueron realizados en la superficie de la tierra y aquí el campo gravitacional es muy débil. Existe al menos un experimento que confirma las predicciones de la relatividad general en el límite de campos fuertes, pero nos referiremos a él más adelante.

¿Qué significa físicamente un campo gravitacional débil o fuerte?

Si la masa de una estrella cualquiera la designamos con M_* y su radio es R_* , entonces una medida de la intensidad del campo gravitacional se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\text{Si } \frac{GM}{c^2} \leq r_* \leq 100 \frac{GM}{c^2}, \quad \text{campo gravitacional fuerte.}$$

(VII.44)

Si $r_* \gg 100 \frac{GM}{c^2}$, el campo es débil.

Donde G es la constante gravitacional y c^2 es la velocidad de la luz. La dimensión de $\left[\frac{GM}{c^2} \right]$ es longitud.

Si $M = M_\odot \equiv$ masa del sol $= 1,9 \times 10^{33}$ gr, entonces: $\frac{GM_\odot}{c^2} = 1,477 \times 10^5$ cm.

Ejemplo

Existe una constante h , que se denomina la constante de Planck y que caracteriza los fenómenos cuánticos, es decir el comportamiento del mundo microscópico. Su valor es

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \quad \text{[Joule-segundo]}.$$

Encuentre una cantidad que tenga dimensiones de **longitud** y en la cual intervengan además, las constantes G y c . Esta cantidad es la longitud de Planck.

Respuesta:

$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \quad \text{cm} \quad \text{(VII.45)}$$

(VII.46)

La dimension de h es [momentum \times distancia].

VII.6.2. Transformación de un elemento de 4-Volumen

El elemento de 4 - volumen es un invariante

$$\begin{aligned}
\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\
\Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x) \\
\Delta y' &= \Delta y \\
\Delta z' &= \Delta z
\end{aligned}$$

Ahora, instantáneamente es $S'(\Delta t' = 0)$ el observador mide el elemento de largo Δx

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \gamma(\Delta x' - v\Delta t') \\
\boxed{\Delta x = \gamma\Delta x'} \Delta t' &= 0
\end{aligned}$$

En un mismo punto x', y', z' medimos el intervalo de tiempo en $S, \Delta t$:

$$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned}
\Delta x' \cdot \Delta y' \cdot \Delta z' \cdot \Delta t' &= \gamma \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta x}{\gamma} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \\
&= \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z
\end{aligned}$$

d^4x' es un invariante bajo transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned}
d^4x' &= \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| d^4x^{\nu} \\
\left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| &= \det \Lambda_{\nu}^{\mu} = +1
\end{aligned}$$

El signo más indica una transformación de coordenadas ortocrona, es decir, que conserva el sentido del tiempo.

En una transformación en las coordenadas espaciales ocurre:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g'} d^4 x' &= \sqrt{-g} d^4 x \\ \sqrt{-g} &= r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{coordenadas esféricas})\end{aligned}$$

por la misma razón anterior, el Jacobiano de una transformación de coordenadas espaciales (por ejemplo, de coordenadas x, y, z a r, θ, φ) está dado por:

$$\text{Jacobiano} = \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \det \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \sqrt{g}$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu,\nu}$. Si además se incluye el tiempo y una transformación de Lorentz, tenemos:

$$\sqrt{-g'} d^4 x' = \sqrt{-g} d^4 x$$

Esta es una relación general, válida para cualquier tipo de transformación de coordenadas. En realidad es una relación general porque es un invariante tensorial. Bajo este disfraz se puede escribir como:

$$\begin{aligned}d^4 x &\equiv \frac{1}{4!} e_{\mu\nu\sigma\tau} dx^{\mu} dx^{\nu} dx^{\sigma} dx^{\tau} \\ e_{\mu\nu\sigma\tau} &= \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \\ \varepsilon_{0123} &= +1 \\ \varepsilon_{0023} &= 0 \\ \varepsilon_{1023} &= -1\end{aligned}$$

Donde el tensor $e_{\mu\nu\sigma\tau}$ es el tensor totalmente antisimétrico, que toma los valores indicados. La forma natural de definir este elemento es recurriendo a las formas diferenciales.

VII.6.3. Las Ecuaciones de Maxwell

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137} \quad \text{Unidades Sistema racionalizado de Heaviside-Lorentz}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & \nabla \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ \partial^i &= -\partial_i \\ F^{oi} &= -E^i\end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ & 0 & -B^3 & B^2 \\ & & 0 & -B^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu},_{\mu} = J^\nu \quad J^\nu = (\rho, \vec{J})$$

$$\begin{aligned}F^{*\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \\ \partial_\mu F^{*\mu\nu} &= 0\end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla \chi \\ \phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right.$$

Massive spin 1 Eqts.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Conservación de la Carga

Ejemplo

En un alambre infinito se ubica una serie infinita de cargas q separadas por una distancia a en el sistema S que se encuentra en reposo con respecto al alambre.

Suponga un observador viajando con una velocidad v paralela al alambre. Encuentre la densidad lineal de cargas que mide este observador S

En S la densidad es $\lambda = \frac{q}{a}$.

En S la distancia a cambia

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' - v\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' - \frac{v}{c^2}\Delta x) \\ \Delta x &= x_A - x_o = x_B - x_o \\ (x_B - x_o) &= \gamma[(x'_B - x'_o) - 0] \\ L &= \gamma L'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a' = \frac{a}{\gamma}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{q}{a'} = \gamma \frac{q}{a} = \gamma \lambda \\ \lambda' &= \gamma \lambda.\end{aligned}$$

De acuerdo a S' , existe una densidad lineal de corriente $J'_x = -\lambda' v$

$$\begin{aligned}J^u &= (c\lambda, \vec{J}) \\ J^\mu J_\mu &= c^2 \lambda^2 \quad (\text{en } S) \\ J'_\mu J'^\mu &= c^2 \lambda'^2 - \lambda'^2 v^2 = \lambda'^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})\end{aligned}$$

$$= \gamma^2 \lambda^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \lambda^2 c^2$$

Se verifica que $J^\mu = (c\lambda, \vec{J})$ es el 4 - vector densidad de corriente.

Otra forma de llegar al mismo resultado:

$$J^\mu = (\rho c, \rho \vec{v})$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Nq}{v} \\ c\rho' &= \Lambda^O_\nu j^\nu \\ &= \Lambda^O_0 J^0 + \Lambda^O_i J^i \\ &= \gamma \rho c + \gamma \beta \rho v \\ \rho' c &= \rho c \gamma (1 - \beta^2) = \frac{\rho c}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\rho' = \frac{\rho}{\gamma}} \\ \nu' &= \Delta x' \Delta y' \Delta z' \\ \Delta x' &= \gamma \Delta x \quad (\Delta t = 0) \\ \nu' &= \gamma \Delta x \Delta y \Delta z = \gamma \nu \\ \rho' &= \frac{Nq}{\nu'} = \frac{Nq}{\gamma \nu} = \frac{\rho}{\gamma} \end{aligned}$$

VII.7. Ejercicios Propuestos

- 1.- Un vagón de tren se mueve sobre una vía a velocidad constante v . A y B están en los extremos del vagón y los observadores C y D están de pie junto a la vía. Definimos el evento AC como ocurrencia de A al pasar frente a C, y los otros similarmente.
 - (a) De los cuatro eventos BD, BC, AD, AC, ¿cuáles sirven para que los observadores que están sobre la vía midan el paso de un reloj llevado por A?
 - (b) Sea Δt el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?

- (c) Supóngase que los eventos BC y AD son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón?. Si no, ¿cuál es primero?
- 2.– Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Å del Hidrógeno H_α , emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de $10^{-3}c$, $10^{-2}c$, y $10^{-1}c$. ¿Es una buena aproximación el resultado a primer orden?
- 3.– Un aeroplano de 40 m de longitud en su sistema de reposo se mueve a velocidad uniforme de $630 \frac{m}{seg}$, con respecto a la Tierra.
- (a) ¿Qué fracción de su longitud de reposo parecerá acortarse, con respecto a un observador sobre la Tierra?
- (b) ¿Cuánto tiempo tardará, según los relojes en tierra, para que el reloj del aeroplano se retrase un microsegundo? (Suponga que únicamente es válida la relatividad especial).
- 4.– El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, por el movimiento orbital de aquella?
- 5.– Se mide la longitud de una nave espacial y se encuentra un valor exactamente igual a la mitad de su longitud propia.
- (a) ¿Cuál es la velocidad de la nave con respecto al sistema del observador? ¿Cuál es la dilatación del tiempo unitario de la nave?
- 6.– Dos naves espaciales tienen una longitud de 100 m cada una, medidos en su sistema propio. Se desplazan en sentidos opuestos, cruzándose en el vuelo. El astronauta que va en la nariz de una nave, que la designamos por A, mide el tiempo que transcurre entre el paso de la nariz y la cola de la otra nave (B) desde su puesto de observación. Encuentra que este intervalo es $2,50 \times 10^{-6}$ segundos. A partir de este dato, encuentre:
- (a) ¿Cuál es la velocidad relativa de las naves?

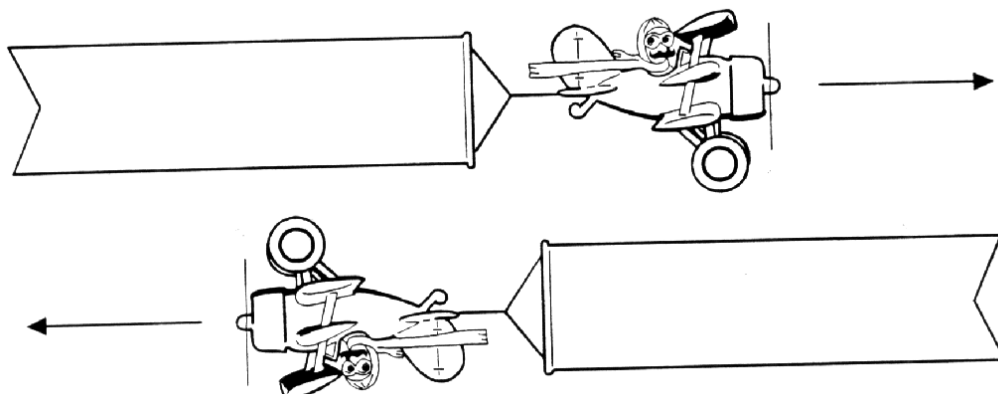


Figura VII.41:

(b) ¿Cuál sería el intervalo medido en la primera nave (A), si ahora registrara el intervalo que transcurre entre que la nariz de la nave (B) pasa frente a la nariz de (A) y la cola de (B) pasa frente a la cola de (A)?

Acompañe ambas respuestas con un gráfico espacio-tiempo.

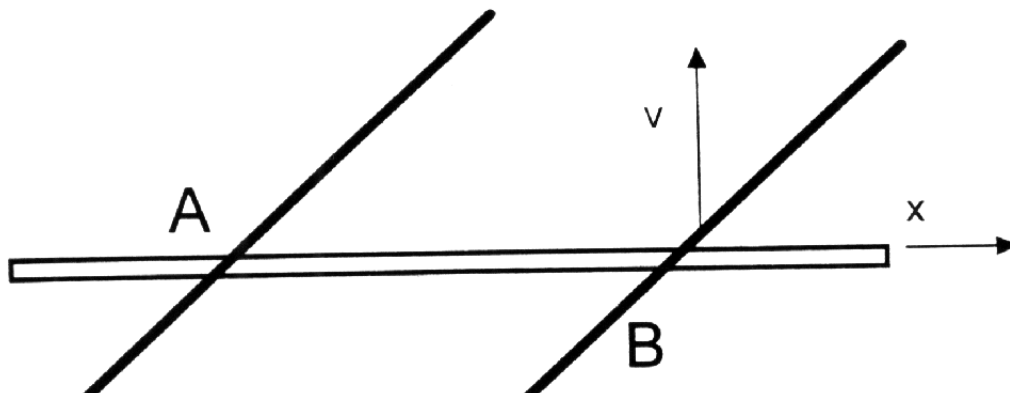
- 7.- (a) Si la vida (propia) promedio de un mesón μ es $2,3 \times 10^{-6}$ segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de $0,00c$, $0,60c$, $0,90c$, y $0,99c$ respectivamente.

(b) Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.

- 8.- A 200 km sobre el nivel del mar, una partícula de rayo cósmico primario choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón π^+ , el cual desciende verticalmente a una velocidad de $0,99c$ y, en su sistema propio, se desintegra $2,5 \times 10^{-8} \text{ seg}$ después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?
- 9.- En la Figura, A y B son los puntos de intersección del eje x (varilla estacionaria) con una varilla inclinada (varilla en movimiento) en dos instantes diferentes. La varilla inclinada se está moviendo en la dirección $+y$ (sin cambiar de inclinación) a una velocidad v .

(a) Demuestre que el punto de intersección de las varillas tiene una velocidad $u = v \cot \theta$ hacia la izquierda.

(b) Sea $\theta = 30^\circ$ y $v = \frac{2}{3}c$. Demuestre que, en este caso, u excede a c y explique porqué no existe ninguna contradicción con la relatividad.



10.– Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, paralelamente uno respecto del otro; el primero a una velocidad de $0,9 c$ y el segundo a una velocidad de $0,7 c$. Encuentre la velocidad de un proyectil con respecto al otro.

11.– Un observador sobre la Tierra que llamamos A, manda una señal con una linterna cada seis minutos. Otro observador, B está en una estación espacial estacionaria con respecto a la Tierra. Designamos con C a un astronauta que viaja en un cohete de A a B, con una velocidad constante de $0,6 c$, con respecto a A.

(a) ¿A qué intervalos recibe B las señales de A?

(b) ¿A qué intervalos recibe C las señales de A?

(c) ¿A qué intervalos recibe B los destellos de C?

12.– Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_o \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

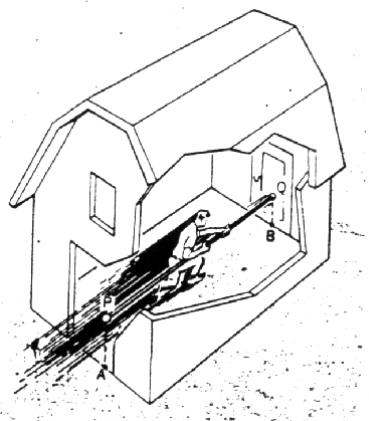


Figura VII.42:

Siendo N_o el número de partículas que existen en $t = 0$ y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_o, \quad N(\tau) = \frac{N_o}{2}.$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_o = 2,6 \times 10^{-8}$ s. Suponiendo que N_o mesones π^+ se han formado a la altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez 0.9999 c llegando solamente el 1 %:

- (i) Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.
- (ii) Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.

13.- La Paradoja del Granero

Considere un atleta corriendo con una garrocha de largo propio 20 m. (La velocidad del atleta con respecto al granero es de $\sqrt{3} \frac{c}{2}$). Éste sostiene la garrocha de modo que se mantiene paralela a la dirección de movimiento del atleta. En su carrera, el deportista pasa por un granero de longitud propia =

10 m. ¿ Sería posible cerrar los dos extremos del cobertizo de manera que el atleta y la garrocha queden atrapados en su interior?

Analice su respuesta desde el punto de vista del atleta y del observador en el interior del granero.

Solución

La paradoja del granero.

Solución:

Sea $L_g \equiv$ longitud propia del granero, $L_g = 10$ m.

$L \equiv$ longitud propia de la garrocha, $L = 20$ m.

i) Análisis con respecto al atleta:

El atleta opina que L_g sufre una contracción puesto que ve aproximarse al granero con velocidad $\sqrt{3}\frac{c}{2}$

$$\text{luego } L_g^{(A)} = L_g \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L_g}{2} = \frac{10}{2} = 5m$$

y como la longitud de su garrocha es L (largo propio)

\Rightarrow para el atleta es imposible quedar atrapado en el interior del granero puesto que: $L > L_g/2$

ii) Análisis con respecto al observador parado en el granero.

El observador B ve aproximarse al atleta con $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, por lo tanto, la contracción de la garrocha es:

$$L^{(B)} = L \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L}{2} = \frac{20}{2} = 10m$$

y como $L_g = 10m$ (largo propio del granero) entonces para observador B es perfectamente posible que el atleta (A) quede atrapado en el granero, ya que:

$$L^{(B)} = L_g \quad L^{(B)} \equiv \text{long. medida por } B \text{ de la garrocha de } A$$

Alternativa # 2: Uso directo de las Transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned} \text{sea } \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \end{aligned}$$

donde **1** y **2** eventos que indican la entrada y salida del granero para análisis (i) y el fin y comienzo de la garrocha en análisis (ii)

Las transformaciones de Lorentz son:

$$\begin{aligned} (*) \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ (**) \Delta t &= \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \end{aligned}$$

i) s' desea medir la longitud del granero $\Rightarrow \Delta t' = 0$ en (*) $\Rightarrow \Delta x = \gamma\Delta x'$

$$\begin{aligned} \Delta x &\equiv \text{longitud granero medido por } s \\ \Delta x' &= \text{longitud granero medido por } s' \\ \Rightarrow \Delta x' &= L_g^{(A)} = \frac{L_g}{\gamma} = \frac{L_g}{2} < L \\ \Rightarrow &\text{Para } s' \text{ es imposible quedar atrapado} \end{aligned}$$

ii) Ahora

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = \text{largo garrocha con respecto } s \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = \text{largo garrocha con respecto } s' \end{aligned}$$

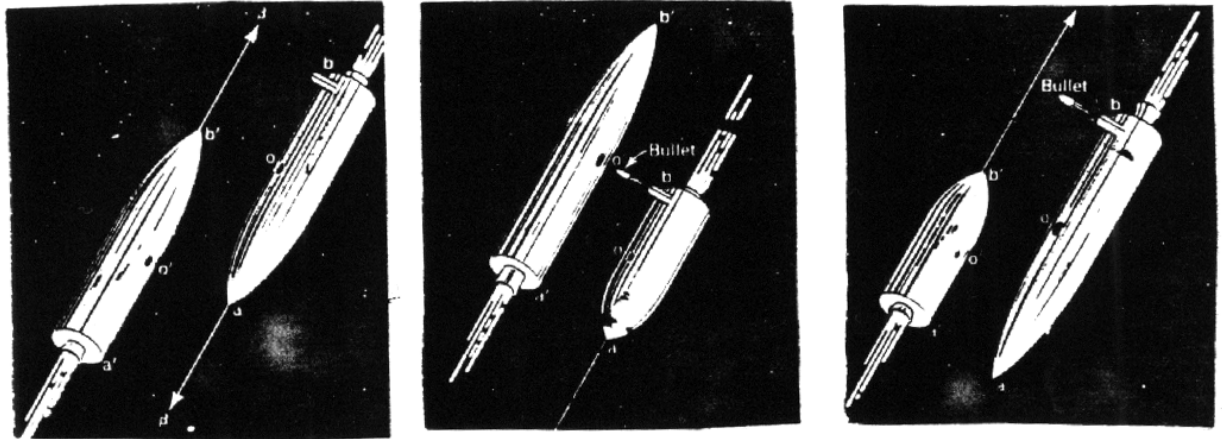
S desea medir la longitud de la garrocha $\Rightarrow \Delta t = 0$

$$\text{de } (**) \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2}\Delta x'$$

$$\text{en } (*) \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

$$L^{(B)} = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} = L_g$$

\Rightarrow Para S es posible quedar atrapado



- 14.- Dos misiles de igual largo propio pasan en sentido contrario a velocidades relativistas. El observador O tiene un cañón en la cola de su nave apuntando en dirección perpendicular al movimiento relativo.

Como indica la figura, O dispara cuando la punta A coincide con A'. En el sistema de referencia de O, el otro misil sufre una contracción de Lorentz. En consecuencia O sospecha que su bala no dará en el blanco. Pero en el sistema de referencia de O', es el misil O el que aparece contraído y por lo tanto, cuando A y A' coinciden el observador ve lo que aparece en la tercera figura.

- (a) Uno de los diagramas contiene un error. Descúbralo.
 (b) Usando las transformaciones de Lorentz descubra lo que realmente sucede en este encuentro.

Nota: $L \equiv$ largo propio de los misiles. $u \equiv$ velocidad del misil O con respecto a O'.

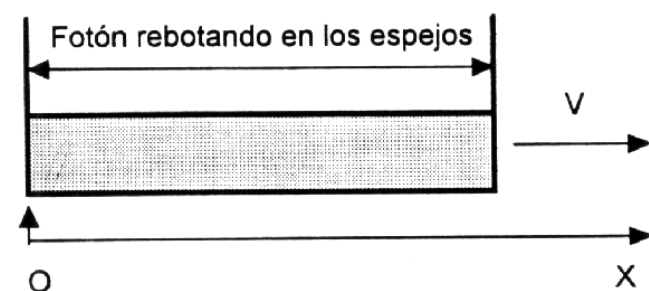
- 15.- Un fotón que inicialmente tiene energía E_i choca con un protón que está en reposo inicialmente. El protón tiene masa m_o . Calcular la energía final del fotón.

Indicación: Recordar que $p = E/c$, para el fotón ($p \equiv$ cantidad de movimiento lineal).

$$\left(\text{Respuesta: } E_f = E_i / \left[\frac{2 E_i}{m_o c^2} + 1 \right] \right).$$



- 16.– Se tiene una barra de largo L que se desplaza con velocidad v . En los extremos de esta barra se ubican dos espejos como se muestra en la figura. Suponga que un fotón se encuentra entre ellos. Si en $t = 0$ el espejo de la izquierda coincide con el punto $x = 0$ y justo en ese instante el fotón está siendo reflejado en ese mismo espejo, dibuje la trayectoria del fotón y de la barra en un diagrama espacio-tiempo $c = 1$.



- 17.– En el sistema S' , un sujeto corre en la dirección del eje y' con velocidad constante $V = \frac{L'}{T'}$, donde L' es la distancia propia con respecto a S' y T' es el tiempo que marca un reloj estático con respecto a S' .

A su vez, S' se mueve con una velocidad U con respecto a otro sistema de referencia inercial S .

a) De acuerdo a un observador en reposo en el sistema S , calcule las dos componentes de la velocidad de este sujeto y a partir de este resultado encuentre la tangente del ángulo con que éste se aproxima.

b) Suponga que en el sistema S' hay una serie de interruptores separados por una distancia propia L' . A medida que el sujeto avanza los va encendiendo. Al ser activados, estos envían un fotón (o un pulso de luz, si Ud. lo prefiere) que *viaja directamente hacia S en la dirección del eje x del sistema S .*

Calcule la velocidad ω_y con que los detectores se encienden en el sistema S , a medida que van recibiendo la señal luminosa proveniente de S' . Suponga,

si le ayuda utilizar este dato, que inicialmente el sistema S' se encontraba a una altura H sobre S . Recuerde que la distancias perpendiculares al movimiento relativo no sufren alteraciones.

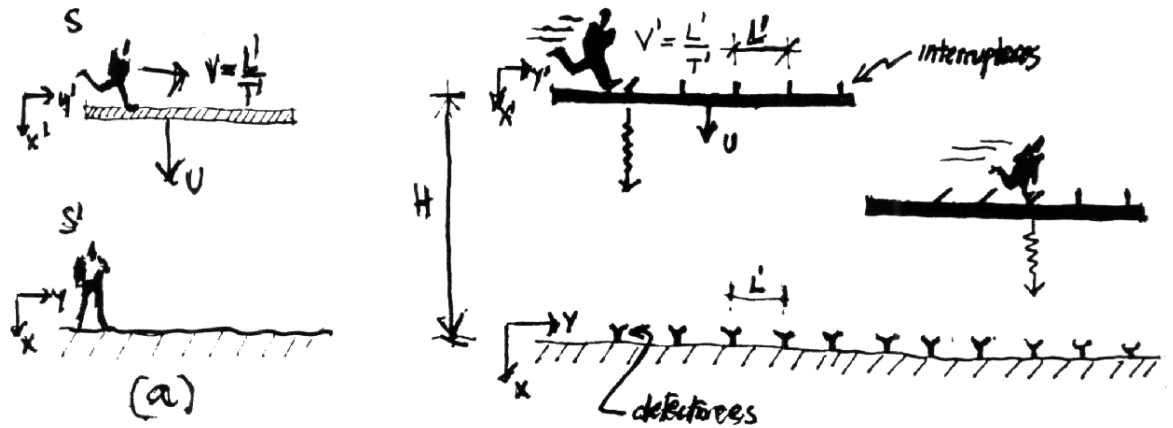


Figura VII.43: Ejercicio # 19

c) Si el observador en S , $U = \bar{V} \cos \theta$, $V = \bar{V} \sin \theta$, representan las componentes de la velocidad \bar{V} con la cual se aproxima el sujeto, demuestre que la velocidad con que se encienden los detectores en el sistema S es:

$$w_y = \frac{\bar{V} \sin \theta}{1 - \frac{\bar{V} \cos \theta}{c}}$$

d) Demuestre que si $\bar{V} \approx c$ (es decir, $\beta \approx 1$) y el ángulo θ es muy pequeño, la velocidad w_y toma su máximo valor para $\theta^2 = 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$.

18.— Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, en forma paralela y en el mismo sentido. Si denominamos uno de los proyectiles por O_1 y le asociamos la velocidad $V_1 = 0,9c$ y al otro, O_2 la velocidad $V_2 = 0,7c$:

a) Encuentre la velocidad de O_1 con respecto a O_2 .

b) Si los largos propios son L_1 y L_2 respectivamente, cuál es el largo del cohete L_2 , de acuerdo a O_1 .

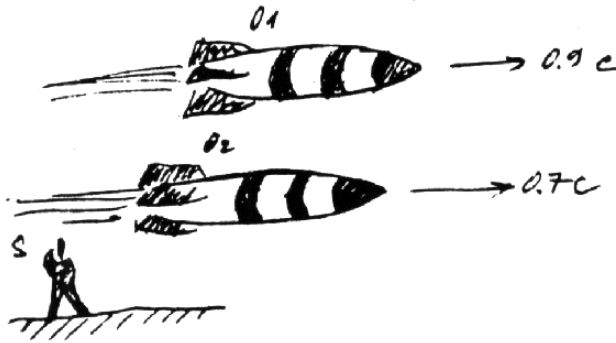
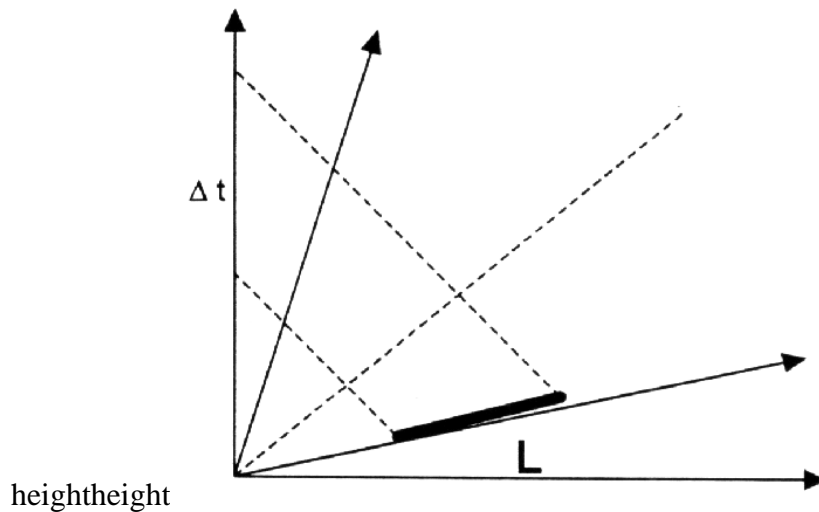
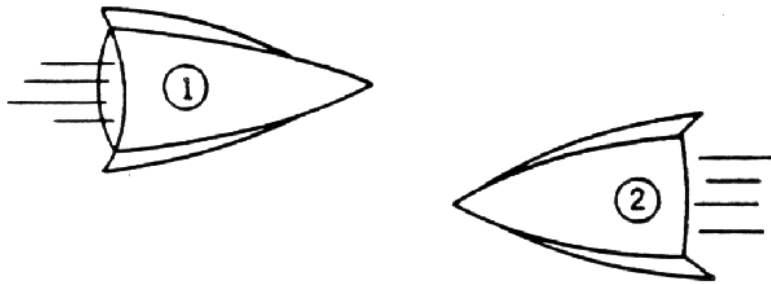


Figura VII.44: Ejercicio # 20

- 19.– Una barra de largo L' con respecto a su sistema en reposo, se aleja con una velocidad V_o de un observador en reposo. Si desde cada uno de los extremos de la barra se envían dos destellos en forma *simultánea con respecto al sistema fijo en la barra*, calcule la diferencia de tiempo Δt con la cual arriba cada uno de los destellos al observador S .



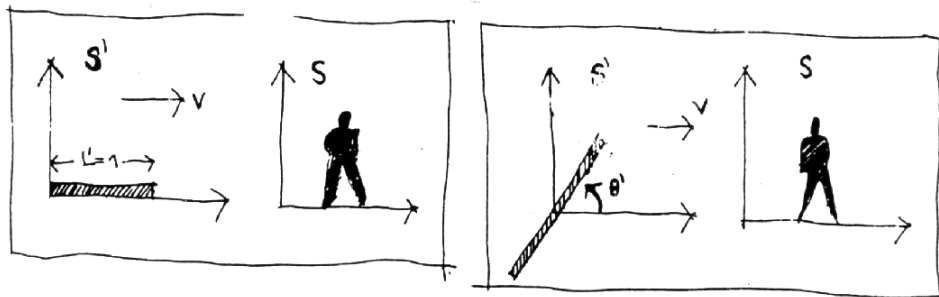
Nota: El intervalo Δt , *no* depende de la distancia a la cual se ubica la barra del origen de S . Ud. puede posicionarla donde más le acomode, respetando las condiciones impuestas en el enunciado del problema.



20.– Dos cohetes que viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto, se cruzan, como se señala en la Figura. En el sistema S , que corresponde a la Tierra, ambos cohetes tienen rapidez u y largo ℓ .

i) Calcule el intervalo –medido por un observador en Tierra–, que transcurre entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que comienzan a separarse.

ii) Calcule el intervalo medido por un pasajero de uno de las naves –sistema S' –, entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que las naves comienzan a separarse.



21.– Una varilla de un metro de longitud en su sistema propio, se aproxima a un observador en reposo con una velocidad $\frac{24}{25}c$, como se indica en la Figura.

a) ¿Cuál es el largo de esta varilla en el sistema del observador?

b) Suponga ahora que la varilla está inclinada en un ángulo $\theta' = \arccos(5/6)$, en el sistema de referencia que viaja con la varilla. Calcule el ángulo de inclinación de la varilla medido en el sistema de referencia del observador fijo en tierra.

c) Calcule el largo de la varilla en el sistema de referencia del observador en reposo, para esta segunda configuración.

Bibliografía

- [1] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [2] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
- [3] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991, Penguin Book.
- [4] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [5] **The illustrated Longitude**, Dava Sobel and Williams J. D. Andrewes, Walker and Company, New York, 1998.
- [6] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
- [7] **Spacetime Physics**, 1966, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.
- [8] *Le Temps en Physique*, M. Mashaal, La Recherche, **24**, # 260, page 1412. (Contiene un resumen de los distintos aspectos del tiempo en la física).
- [9] *Variations in the rotation of earth*, W. E. Carter et al., Sci., **224**, 1 June, page 957.
- [10] *Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser*, R. F. C. Vessot et al., 1980, Phys. Rev. Lett., **45**, page 2081.
- [11] *Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains*, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.

- [12] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549.
- [13] *Improved Kennedy–Thorndike Experiment to test Special Relativity*, 1990, D. Hils and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **64**, page 1697.
- [14] *From Alchemy to Quarks: The Study of Physics as a Liberal Art*, Sheldon L. Glashow, Brooks and Cole Publishing Company, 1993.