FI34A-03, Pauta Control 3

Profesor: **Sebastián López** Auxiliares: Cristobal Arratia
Laura Pérez

27 de junio de 2004

1. *a*) Nombre (sólo *nombre*) 2 experimentos que se explican solamente considerando la luz como una onda y 2 que sólo son explicados si la luz se considera un flujo de fotones.

   Ejemplos de luz como onda: refracción, reflección, difracción, experimento de Herz, etc.; ejemplos de luz como flujo de partículas: efecto Compton, efecto fotoeléctrico, lineas espectrales, etc.

   b) ¿Compraría Ud. un panel fotoeléctrico a un vendedor que garantiza tener los materiales con las funciones de trabajo más altas del mercado? Justifique.

   No, pues tal panel producirá fotoelectrones solamente al exponerse a fotones de energías altas.

   c) En el caso de los niveles del electrón confinado en una caja, ¿imponiendo qué condición surgen niveles de energía discretos? Explicite a qué cantidad física se aplica tal condición.

   Imponiendo que la función de onda asociada al electrón, $\psi = 0$ en los bordes de la caja.

   d) ¿Por qué los fenómenos cuánticos no son evidentes en la vida diaria? Conteste en términos de niveles de energía *y* de la constante de Planck.

   Porque lo pequeño de h implica que los niveles de energía serán perceptibles macroscópicamente sólo para números cuánticos grandes, rango en el cual la cuantización de éstos se diluye en un continuo.

   e) En el efecto Compton, si la partícula de prueba es un electrón, las diferencias a medir entre longitud de onda incidente y emergente son del orden de $\Delta\lambda \approx \lambda_C \approx 0{,}02$ Å. ¿Cuánto vale $\Delta\lambda$ si la partícula de prueba es un protón?

   Dado que $\lambda_C \propto 1/m$, y que $m_p \approx m_e \times 2000$, se tiene que para el protón: $\Delta\lambda \approx 10^{-5}$ Å.

   f) En clases se mencionó que la trayectoria de un electrón en mecánica cuántica está descrita por una *función de onda*, ψ. Explique (i) el significado de $|\psi|^2$; (ii) su relación con el principio de incerteza.

   (i) $|\psi(x)|^2 dx$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en $x \pm dx/2$. (ii) Por lo tanto, en la descripción del problema físico a través de ψ, el concepto de trayectoria queda indeterminado, y con esto también su posición y velocidad, lo que es otra formulación del principio de incerteza.

2. *a*) Recuerde de relatividad que: *Energia en reposo + Energia cinética = Energia total* y (re)-encuentre la expresión para γmc^2 en términos de m, c, y K.

   Como $E_{reposo} + E_{cinetica} = E_{total}$ entonces: $\gamma mc^2 = mc^2 + K$ `0.5 puntos`

   b) Usando la expresión en a), demuestre que la longitud de onda de De Broglie para una partícula relativista está dada por:

$$\lambda = h/\sqrt{2mK(1 + K/2mc^2)}$$

   Usando el invariante: $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, y despejando tendremos que: $p^2 = 2mK\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)$.
   La longitud de onda de De Broglie para una partícula es: $\lambda = h/p$ entonces reemplazando se obtiene lo pedido. `1.5 puntos`

   c) Encuentre que para $K \ll mc^2$ se tendrá:

$$\lambda = h/\sqrt{2mK}$$

   Como $K \ll mc^2$ se trata de una partícula no relativista, así escribimos: $K \sim \frac{1}{2}mv^2 \sim \frac{p^2}{2m}$, despejando $p = \sqrt{2mK}$ y reemplazando en la longitud de onda de De Broglie para una partícula se obtiene lo pedido. `1.0 punto`
   Hacer una aproximación sobre $K/mc^2 \ll 1$ también era considerado válido.

   d) Muestre que para el caso ultrarrelativista: $K \gg mc^2$ se tendrá:

$$\lambda = hc/K$$

   Como $K \gg mc^2$ se trata de una partícula ultra relativista, y su energía total se aproxima por $E_{Total} \sim K$ pues la energía en reposo es despreciable con respecto a su energía cinética.
   Además para una partícula ultra relativista se tiene : $E_{Total} = pc \sim K$ entonces reemplazando en la longitud de onda de De Broglie se obtiene lo pedido. `1.0 punto`
   Hacer aproximaciones sobre: $mc^2/K \ll 1$ también era válido.

   e) Calcule λ de De Broglie de un electrón ($m_e = 511$ keV/c^2) si $K = 5{,}11$ keV.
   Podemos usar la fórmula general de la parte (b), pero era una buena aproximación usar la parte (c) pues: $K \ll mc^2$ ie. $5{,}11 \times 10^3 eV \ll 5{,}11 \times 10^5 eV$. `1.0 punto`

$$\Rightarrow \lambda \sim \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6} eVm}{\sqrt{2 \cdot 5{,}11 \times 10^5 \cdot 5{,}11 \times 10^3 eV}} \sim 1{,}72 \times 10^{-11}$$

   f) Calcule λ de De Broglie de un electrón si $K = 5{,}11$ MeV.
   Hay que usar la fórmula general de la parte (b), pero era una buena aproximación usar la parte (d) pues: $K \gg mc^2$ ie. $5{,}11 \times 10^6 eV \gg 5{,}11 \times 10^5 eV$. `1.0 punto`

$$\Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K(1 + K/2mc^2)}} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6} eVm}{\sqrt{2 \cdot 5{,}11 \times 10^5 \cdot 5{,}11 \times 10^6 \cdot (1 + 10/2) eV}} \sim 2{,}23 \times 10^{-13}$$

3. La velocidad de fase de olas en el océano tiene dos límites: $c = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ para $\lambda \ll h$ y $c = \sqrt{gh}$ para $\lambda > h$. Aquí g es la aceleración de gravedad, h la profundidad, y λ la longitud de onda.

   a) Encuentre la velocidad de grupo para los dos casos.
   Caso $\lambda \ll h$:

$$c = \sqrt{g\lambda/2\pi} = \sqrt{g/k} = w/k$$
$$v_g = dw/dk = d(\sqrt{gk})/dk = \sqrt{g/k}/2 = c/2$$

`1.5 puntos`

   Caso $\lambda > h$:

$$c = \sqrt{gh} = w/k$$
$$v_g = dw/dk = d(\sqrt{gh}k)/dk = \sqrt{gh} = c$$

`1.5 puntos`

   b) ¿En cuánto tiempo grupos de ondas en el océano (llamados *tsunamis*) llegarán a la costa chilena si éstos se generaron a $20\,000$ km de distancia y avanzan a 6 km del fondo marino?
   Aquí, $\lambda = 200$ km, por lo tanto

$$t = d/v_g = d/c = d/\sqrt{gh} = 20\,000\,000/\sqrt{9{,}8 \times 6\,000} = 82478\text{s} = 22{,}9\text{h}$$

`1.5 puntos`

   c) ¿Cuántos tsunamis por hora se recibirán? Considere que los *tsunamis* entran a la plataforma continental que tiene 60 m de profundidad.

$$\nu = v_g/\lambda = c/\lambda = \sqrt{9{,}8 \times 60}/200\,000 = 0{,}00012\ \text{s}^{-1} = 0{,}44\ \text{h}^{-1}$$

   Es decir, cada 2.3 horas llega un *tsunami*. `1.5 puntos`
   En b) y c) considere una distancia entre *tsunamis* de 200 km y $g = 9{,}8$ m s^{-2}

4. *a*) Verifique que el principio de incerteza puede ser expresado en la forma $\Delta L \Delta\theta > h/4\pi$, donde ΔL es la incerteza en el momentum angular L de una partícula y $\Delta\theta$ es la incerteza en su posición angular. *Hint*: Considere una partícula de masa m moviéndose en un círculo de radio r a una velocidad v.

   Se tiene el principio de incertidumbre: $\Delta x \Delta p > h/4\pi$. Si consideramos una partícula de masa m moviéndose en un círculo de radio r a una velocidad v, tenemos que: $\Delta x = r\Delta\theta$ (ya sea porque consideramos r fijo o porque tomamos $\Delta x \Delta p$ en la dirección tangencial al círculo). Además: $\Delta p = m\Delta v$, entonces se tiene que $\Delta x \Delta p = r\Delta\theta m\Delta v = \Delta\theta m r\Delta v$. Y recordando que para un movimiento circular $L = mrv$, obtenemos finalmente: $\Delta\theta\Delta L \geq h/4pi$

b) ¿A qué incerteza en L la posición angular de una partı́cula llega a estar completamente indeterminada?.

Para que la posición angular este totalmente indeterminada basta que: $\Delta\theta = \pi$ (también se consideró correcto $\Delta\theta = 2\pi$). Esta incertidumbre se obtiene como cota inferior posible si $\Delta L = h/4\pi^2$, y cualquier disminución en ΔL aumentará el mínimo $\Delta\theta$, luego para que $\Delta\theta$ esté absolutamente indeterminada se requiere que $\Delta L \leq h/4\pi^2$.