FI34A-03 Física Contemporánea

Guía 2

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Cristobal Arratia
Laura Pérez

1. Verifique que las soluciones a la ecuación de Friedmann se pueden escribir de forma parámetrica como sigue, donde $x \geq 0$ parametriza la solución:

   a) Para un universo cerrado:

$$R = \frac{4\pi G\rho_0}{3kc^2}[1 - \cos x] = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}[1 - \cos x]$$

$$t = \frac{4\pi G\rho_0}{3k^{3/2}c^3}[x - \sin x] = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}[x - \sin x]$$

   b) Para un universo abierto:

$$R = \frac{4\pi G\rho_0}{3|k|c^2}[\cosh x - 1] = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)}[\cosh x - 1]$$

$$t = \frac{4\pi G\rho_0}{3|k|^{3/2}c^3}[\sinh x - x] = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}}[\sinh x - x]$$

   c) Considere ahora un universo cerrado, identifique el valor máximo de la expansión R_{max}, y el tiempo de vida del universo Δt, entre el Big Bang y el Big Crunch.

2. Se define el parámetro de desaceleración, $q(t)$ como:

$$q(t) \equiv -\frac{R(t)[d^2R(t)/dt^2]}{[dR(t)/dt]^2}$$

   Encuentre que la relación entre $q(t)$ y el parámetro de densidad $\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_c(t)$ es:

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)$$

   Asi, muestre como el valor del parámetro de desaceleración en el presente, sirve para clasificar el universo en los distintos tipos existentes (abierto, plano, cerrado) dependiendo del valor que tome q_0

3. La Radiación de Fondo Cósmico sigue la curva de radiación de un cuerpo negro, descrita por la siguiente densidad de energía (por unidad de volumen):

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

Debido a la expansión y enfriamiento del universo, la energía por unidad de volumen entre longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$ decreció, y comparada con la densidad de energía en el pasado la densidad de energía actual es menor por un factor R^4. Este factor se debe a que el volumen del universo se ha ido incrementando, así aparece un factor R^3. Pero además, la longitud de onda escala como $\lambda(R) = R\lambda_0$ (con λ_0 la longitud de onda actual), entonces los fotones de hoy en día poseen longitudes de onda más largas, y por lo tanto menor energía ($E_{fotón} = hc/\lambda$). Así, la densidad de energía de radiación de un cuerpo negro en el presente u_0, se relaciona con un valor en el pasado como:

$$u_0 d\lambda_0 = R^4 u(R) d\lambda(R)$$

Usando esta última ecuación, muestre que la temperatura de radiación de cuerpo negro se relaciona con la temperatura en el pasado por:

$$T_0 = RT(R)$$

4. El redshift de cierto cuasar es de $z = 4{,}897$. Suponga un universo plano, y encuentre el porcentaje de ”vida”del universo que habia transcurrido, cuando la luz dejó ese cuasar.

5. Para resolver la paradoja de Olbers, se puede argumentar que la ley del inverso cuadrado para el flujo de una estrella nos da una solución a esta paradoja. Esta ley se enuncia para una fuente luminosa como:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

donde F es el flujo de energía por unidad de area y unidad de tiempo, r es la distancia a la estrella, y L es la luminosidad (que no depende de la distancia a la estrella). Para ver si este argumento es válido o no, considere una distribucion uniforme de estrellas, con n estrellas por unidad de volumen, cada una con luminosidad L. Imagine dos cascarones esféricos de radios r_1 y r_2 centrados en la tierra, cada uno con grosor Δr. Muestre que el mismo flujo de energía llega a la tierra desde cada cascarón.

6. *a*) Encuentre el tiempo de vida de un universo cerrado, expresado como un múltiplo del tiempo de Hubble (t_H), en función del parámetro de densidad Ω.

   b) Suponga que el universo es cerrado. Sabiendo que la edad del Sol es de aproximadamente 4.5 billones de años, y que vivimos en un universo en expansión, que límite le pondría ud. al valor del parámetro de densidad actual Ω_0 ? Considere los casos $h = 0{,}5$ y $h = 1$.

7. Anisotropía Dipolar de la Radiación de Fondo Cósmico. Encuentre que la magnitud de la variación en temperatura de la Radiación de Fondo Cósmico, debido a los movimientos peculiares del Sol es de:

$$T_{obs} \sim T_{emitido} \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta\right)$$

Hint: use la Ley de Wien para radiación de cuerpo negro: $\lambda_{max} T = cte.$, además del efecto Doppler Relativista, para fuentes que se mueven de forma radial y perpendicular al observador, en un ángulo θ.

8. *a*) A que época después del Big-bang se igualan la densidad de masa y de radiación?

   b) Solucione la ec. de Friedmann para $k = 0$ y un Universo compuesto solo de radiación ($\rho = \rho_{rad,0}/R^4$).

   c) Cuál sería la edad del Universo hoy en este caso?