Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Mecánica

Ejercicios de Dinámica Lagrangeana

Máximo León Ganem

28 de Mayo de 2004.*Sujeto a correcciones de cualquier tipo

1. Pequeñas Oscilaciones en Torno a Equilibrios Estables

1.1. Teoría...

Hasta ahora hemos analizado movimientos generales de partículas y solidos usando EL. Ahora nos interesa conocer los 'pequeños' movimientos que realizan los objetos cuando los perturbamos ligeramente de su estado de equilibrio (donde la energía potencial efectiva es un mínimo, tal como se demostró en el curso anterior).Usaremos el mismo concepto para obtener los puntos de equilibrio de un sistema dinámico dado el sistema de referencia que usamos. Primero partiremos con obtener las ecuaciones de movimiento, usando EL. Luego, encontraremos los puntos de equilibrio ya sea derivando el potencial efectivo del sistema, o bien, igualando a cero todas las derivadas de las coordenadas generalizas (i.e. el cuerpo no se mueve). Una vez hecho esto, usaremos en la mayoría de los casos un çambio astuto de variables", que permitan escribir las ecuaciones de movimiento en forma matricial. El cambio de variables típico es

$$X_i = X_{i,0} + \delta_i$$

Donde X_i representa la coordenada generalizada i que estamos usando, $X_{i,0}$ es el punto de equilibrio del sistema, que en el caso mas trivial siempre es cero; δ_i es una perturbación pequeña, esto es, que se puede considerar como una variable que no varia mucho. Hay que notar que las derivadas de la perturbación y de la coordenada generalizada y son iguales. Otra suposición que haremos es que

$$\frac{d^k\delta_i}{dt^k} \cdot \frac{d^l\delta_j}{dt^l} \approx 0 \ \forall i, j$$

Donde k,l =0,1,2, según lo que tengamos. Una vez que hacemos estas suposiciones escribiremos las ecuaciones de movimiento como sigue:

$$A\ddot{\vec{\delta}} + K\vec{\delta} = 0$$

Donde A es una matriz diagonal, K es simétrica y $\vec{\delta}$ es nuestro vector de pequeñas oscilaciones. Las ecuaciones anteriores son las que describen el movimiento para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio. Para resolverla, asumimos el típico comportamiento de oscilador armónico de un sistema con las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones, planteada anteriormente. Sea entonces:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} z_i e^{\mathbf{i}\varpi t} \\ z_j e^{\mathbf{i}\varpi t} \end{bmatrix}$$

Este vector es derivable en el espacio complejo. Al derivarlo 2 veces obtenemos

$$\ddot{\vec{\delta}} = -\varpi^2 \begin{bmatrix} z_i e^{\mathbf{i}\varpi t} \\ z_j e^{\mathbf{i}\varpi t} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar, obtenemos

$$(-A\varpi^2 + K) \begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} = 0$$

Donde ϖ^2 son las frecuencias de los modos de oscilación z_i. Es importante notar que hay tantos modos de oscilación como g.l. tiene el sistema.

Para obtener ϖ^2 calculamos

$$det[-A\varpi^2 + K] = 0$$

Con esta última ecuación, obtenemos un polinomio cuyo grado es igual al número de g.l. . Al reemplazar los valores de ϖ_i en la ecuación para pequeñas oscilaciones, obtenemos los modos de oscilación z_i, que nos indican cómo se mueve el sistema cuando alcanza una frecuencia angular de valor ϖ_i.

Más formalmente, y usando la conocida expresión para la expansión de Taylor en varias variables, lo que estamos haciendo es:

Tenemos L = T(q_i,$\dot{q}_i$) - V(q_i). Para encontrar los modos y frecuencias de pequeñas oscilaciones, expandimos T y V hasta segundo orden. Es decir, escribimos, usando que $q_i = q_{i,0} + \delta_i$ y notando con subíndice cero la evaluación de las derivadas en el punto de equilibrio respectivo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + ...$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j + ...$$

donde

$$m_{ij}(q_i) = m_{ij}(q_{i,0}) + \sum_k (\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k})_0 \delta_k + ...$$

Además,

$$V = V(q_{i,0}) + \sum_r (\frac{\partial V}{\partial \delta_r})_0 \delta_r + \sum_{r,l} (\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_l})_0 \delta_r \delta_l + ...$$

El segundo término es cero. Luego como el primero es una constante y no influye cuando determinamos las ecuaciones de movimiento, lo podemos ignorar, de manera que solo debemos encontrar

$$V = \sum_{r,l} (\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_l})_0 \delta_r \delta_l$$

El lagrangeano queda entonces:

$$L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j - (\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})_0 \delta_i \delta_j)$$

Luego las ecuaciones de movimiento, usando EL quedan:

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\delta}_j + \sum_{r,j} (\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_j})_0 \delta_j = 0$$

Cuya solución tiene la forma

$$\delta_j = z_j e^{\mathbf{i} \varpi t}$$

Hay que notar que para que los valores de ϖ no sean complejos, el término $(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_j})_0 > 0$, que implica que el equilibrio debe ser estable.

Al reemplazar, se obtiene, en forma matricial el mismo resultado expuesto anteriormente, es decir

$$det[-A\varpi^2 + K] = 0$$

Cualquiera de los métodos enunciados anteriormente es válido. Será la práctica la que indicará cual es mejor para un problema dado.

1.1.1. Ejercicios

Problema 5

El marco de la figura 5, de momento de inercia I_1, se encuentra empotrado como se muestra, y se pone a girar con una velocidad desconocida $\dot{\theta}_1$. El disco D, de momentos de inercia principales I_x=I_y, I_z y masa M se mantiene fijo en el marco y rota con una velocidad angular $\dot{\theta}_2$. Los ejes del marco y disco, tienen conectados resortes de torsión de constantes elásticas k_1 y k_2, respectivamente. El eje del disco esta inclinado en un ángulo α, puesto de manera que el centro de masa esta en una excéntrica de tamaño s, respecto del eje de rotación del marco (ver figura 5). Muestre que las frecuencias para el movimiento de pequeñas oscilaciones de los modos de θ_1 y θ_2 vienen dados por:

$$\varpi^2 = \frac{Ik_2 + I_z k_1 \pm \sqrt{(Ik_2 + I_z k_1)^2 - 4k_1 k_2 (I_1 + Ms^2 + I_x cos^2\alpha) I_z}}{2I_z(I_1 + Ms^2 + I_x cos^2\alpha)}$$

Donde

$$I = I_1 + Ms^2 + I_x cos^2\alpha + I_z sin^2\alpha$$

Solución:
Antes que todo, un resorte de torsión de constante elástica k, es un resorte que guarda energía al estar sometido a torsión, valga la redundancia, de manera que la energía del resorte es

$$E_{resorte} = \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2$$

Donde θ es el ángulo con respecto al ángulo de equilibrio θ_0, el resorte se hace girar.

Con esto claro, nos arrojamos a resolver el problema.

Como antes, estamos trabajando con un sólido, por lo que debemos determinar la energía cinética en dos partes: la energía de rotación T_r y la de traslación del centro de masa T_t. Antes, colocamos el sistema fijo polar ($\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$, $\hat{z}$) en la base del marco (no del eje, para no confundirse) y el móvil, no inercial ($\hat{x}$', $\hat{y}$', $\hat{z}$') fijo al centro de masa del disco D, pero que no rota con el, usando el hecho de que D es simétrico.

El sólido esta compuesto por el marco y el disco D. Luego, como

$$\dot{\vec{\rho}} = s\dot{\theta}_1\hat{\theta}$$

Se tendrá que

$$T_t = \frac{1}{2}Ms^2\dot{\theta}_1^2$$

La energía de rotación en su forma general es

$$T_r = \frac{1}{2}(I_x\varpi_x^2 + I_y\varpi_y^2 + I_z\varpi_z^2 + I_1\dot{\theta}_1^2)$$

Por lo que debemos determinar el valor de $\vec{\Omega} = (\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$. Para ello debemos calcular la velocidad angular del sólido $\vec{\Omega}$, que a groso modo es

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}_1\hat{z} + \dot{\theta}_2\hat{z}'$$

Luego, debemos proyectar los vectores de la base inercial en la base no inercial de los ejes principales que, como antes, coinciden con el sistema $\hat{x}$'$\hat{y}$'$\hat{z}$' que colocamos en D. Así,

$$\hat{z} = \hat{z}'sin\alpha - \hat{x}'cos\alpha$$

De ésta manera,

$$T_r = \frac{1}{2}I_x\dot{\theta}_1^2coes^2\alpha + \frac{1}{2}I_z(\dot{\theta}_1sin\alpha + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}I_1Ms^2\dot{\theta}_1^2$$

El potencial esta dado por el de los resortes de torsión y despreciamos la energía potencial (suponiendo que la altura es despreciable) con respecto a la energía que aportan los resortes. Luego,

$$V = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\theta_2^2$$

El lagrangeano queda entonces como

$$L = T_t + T_r - V = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(I_1 + Ms^2 + I_xcos^2\alpha + I_zsin^2\alpha) + I_z\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - [\frac{1}{2}k_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\theta_2^2]$$

Usando EL, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$I\ddot{\theta}_1 + I_z\ddot{\theta}_2sin\alpha + k_1\theta_1 = 0$$

$$I_z\ddot{\theta}_2 + I_z\ddot{\theta}_1sin\alpha + k_2\theta_2 = 0$$

Donde I = I_1 + Ms^2 + $I_xcos^2\alpha$+$I_zsin^2\alpha$.

Las ecuaciones anteriores, podemos escribirlas en forma matricial:

$$A\ddot{\vec{\theta}} + K\vec{\theta} = 0$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} I & I_z sin\alpha \\ I_z sin\alpha & I_z \end{bmatrix}$$

y

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Sea entonces

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} z_1 e^{\mathbf{i}\varpi t} \\ z_2 e^{\mathbf{i}\varpi t} \end{bmatrix}$$

Reemplazando y derivando donde corresponda, llegamos a que z_1 y z_2, las amplitudes de los modos de oscilación, son tales que:

$$\begin{bmatrix} -\varpi^2 I + k_1 & -\varpi^2 I_z sin\alpha \\ -\varpi^2 I_z sin\alpha & -\varpi^2 I_z + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0$$

Por lo que debemos calcular

$$det(\begin{bmatrix} -\varpi^2 I + k_1 & -\varpi^2 I_z sin\alpha \\ -\varpi^2 I_z sin\alpha & -\varpi^2 I_z + k_2 \end{bmatrix}) = 0$$

El cálculo de este determinante da como resultado

$$(-\varpi^2 I + k_1)(-\varpi^2 I_z + k_2) = \varpi^4 I_z^2 sin^2\alpha$$

Desarrollando los términos, llegamos a la siguiente ecuación cuadrática para ϖ^2:

$$\varpi^4 (Ms^2 + I_1 + I_x cos^2\alpha) I_z - \varpi^2 (Ik_2 + I_z k_1) + k_1 k_2 = 0$$

Que (finalmente!!) da como resultado:

$$\varpi^2 = \frac{Ik_2 + I_z k_1 \pm \sqrt{(Ik_2 + I_z k_1)^2 - 4k_1 k_2 (I_1 + Ms^2 + I_x cos^2\alpha) I_z}}{2I_z (I_1 + Ms^2 + I_x cos^2\alpha)} \quad \surd\surd$$

Donde

$$I = I_1 + Ms^2 + I_x cos^2\alpha + I_z sin^2\alpha$$

Aquí usamos el primer método que se enunció para encontrar las frecuencias de pequeñas oscilaciones, dada las características del problema, que suele ser así en la mayoría de los casos. Sin embargo, el método más formal nunca falla, mientras que éste método sirve para problemas con pocos grados de libertad y equilibrios nulos, es decir, que el valor de las coordenadas generalizadas valen cero en el equilibrio estático del sistema. El caso de equilibrios dinámicos o relativos, se discute más adelante, usando la función de Routh (parecida al Hamiltoniano).