Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Mecánica

Ejercicios de Dinamica Lagrangeana

Máximo León Ganem

Mayo de 2004

1. Ecuaciones de Euler Lagrange para Sistemas de Partículas y Sólidos

1.0.1. Ejercicios

Problema 1

Considere el sistema que se muestra en la figura1. Un tubo liso que forma un ángulo α con respecto a la horizontal, contiene 2 cuerpos de masa m_1, m_2 que se conectan mediante resortes de constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente. El tubo esta ubicado, a una distancia **s** del centro de la mesa, de manera que el plano que pasa por el centro del tubo también pasa por el eje de rotación de la mesa giratoria (a velocidad angular constante $\dot{\theta} = \varpi$). Ésta ultima está ubicada sobre un ascensor que se mueve hacia arriba con aceleración **a**. Obtenga las ecuaciones de movimiento, bajo la acción de la gravedad **g**, en función de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2.

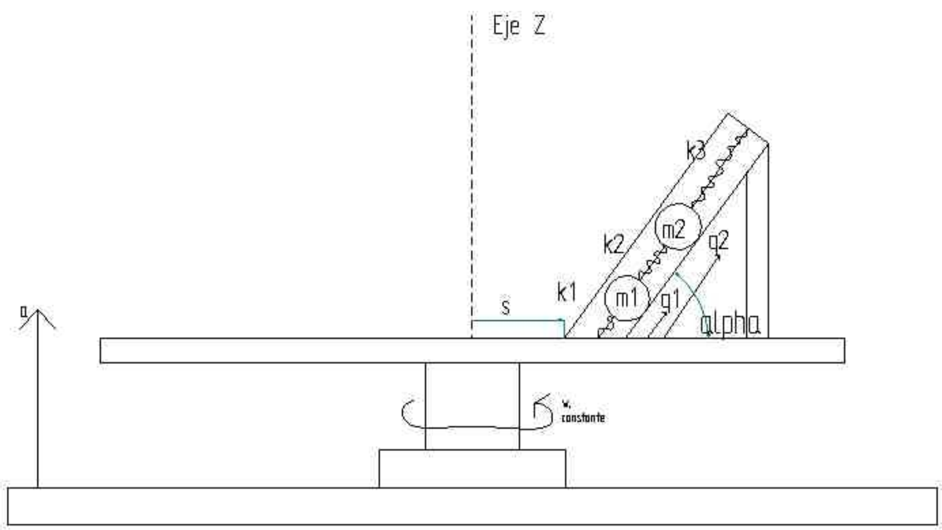

Figura 1: Problema 1

Solución:

Vamos a utilizar coordenadas polares expresadas en función de q_1 y q_2, y luego usaremos al correspondiente energía cinética y potencial usando éstas coordenadas para determinar el Lagrangeano L=T-V, recordando que:

$$\vec{R}_i = r_i\hat{\rho} \Rightarrow v_i = \dot{r_i}\hat{\rho} + r_i\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}_i\hat{k}$$

i=1,2.Luego:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r_1}^2 + r_1^2\dot{\theta}^2 + \dot{z_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{r_2}^2 + r_2^2\dot{\theta}^2 + \dot{z_2}^2)$$

Donde

$$r_i = s + q_i\cos\alpha$$

$$\dot{\theta} = \varpi$$

$$z_i = q_i\sin\alpha + \frac{1}{2}at^2$$

Con i=1,2. Reemplazando:

$$T = \frac{1}{2}m_1[\dot{q_1}^2 + 2\dot{q_1}at\sin\alpha + (s+q_1\cos\alpha)^2\varpi^2 + at^2] + \frac{1}{2}m_2[\dot{q_2}^2 + 2\dot{q_2}at\sin\alpha + (s+q_2\cos\alpha)^2\varpi^2 + at^2]$$

Determinamos ahora el potencial V:

$$V = m_1gz_1 + m_2gz_2 + \frac{1}{2}k_1(q_1-l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2-q_1-l_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(q_2-l_3)^2$$

Usando las ecuaciones de (EL) para este sistema, se tiene que :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}) = m_i(\ddot{q}_i + asin\alpha)\ i = 1, 2.$$

Notar que los trabajos virtuales no conservativos son cero. Luego:

$$\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial q_1} = m_1\varpi^2(s + q_1cos\alpha)cos\alpha + m_1gsin\alpha + k_1(q_1-l_1) - k_2(q_2-q_1-l_2)$$

$$\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial q_2} = m_2\varpi^2(s + q_icos\alpha)cos\alpha + m_2gsin\alpha - (k_2+k_3)q_2 + k_2q_1 + k_2l_2 + k_3(l_1+l_2)$$

Finalmente, por coordenada q_i, reemplazando z_i y r_i, se tiene que:

$$m_1(\ddot{q_1} + asin\alpha) - m_1\varpi^2(s + q_1cos\alpha)cos\alpha = m_1gsin\alpha + k_1(q_1-l_1) - k_2(q_2-q_1-l_2)$$

$$m_1(\ddot{q_1} + asin\alpha) - m_1\varpi^2(s + q_1cos\alpha)cos\alpha = m_2gsin\alpha - (k_2+k_3)q_2 + k_2q_1 + k_2l_2 + k_3(l_1+l_2)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema dinámico. Notar que el efecto de la aceleración **a** es 'incrementar' la aceleración **g**. El procedimiento para resolver problemas ha sido expuesto, y es el que en la mayoría de los casos sirve para resolver problemas con muchas partículas. La dificultad casi siempre radica en encontrar la buena expresión para T, y pocas veces es difícil calcular V, pero no quiere decir que nunca ocurra. A veces resulta mejor usar sistemas de coordenadas conocidas (polares, esféricas, cartesianas, hiperbólicas, etc.), pero como se verá en el próximo problema, el uso del campo de velocidades para movimiento relativo soluciona muchas dificultades técnicas.

Problema 2
El eje vertical de la figura 2 se hace rotar con velocidad angular ϖ constante. La partícula de masa **m** se puede mover libremente en el el plano de las dos barras aa' y bb', ambas de largo **R**, separadas por una distancia **s** constante, que rota con el eje y que pasa por su centro. Los resortes tienen constantes k_1 y k_2, y el movimiento se realiza bajo la acción de a gravedad. Determine las ecuaciones de movimiento de la partícula.

Solución:
Antes de empezar cualquier problema de este tipo siempre es bueno saber con cuantos g.l. estamos trabajando para poder enfocar debidamente el problema y plantear correctamente las ecuaciones EL. Este problema tiene 2 dos grados de libertad, pues se dice que la masa m se mueve LIBREMENTE en el plano que se indica en el enunciado, mientras que la rotación ϖ no es un g.l., pues se dice que es constante y es un valor dado, luego esta es una constricción del sistema.

Llamemos a esta posición libre (x,y) medida con respecto a un sistema no inercial ubicado en extremo de la barra aa', tal comose indica en la figura 2. Con esto claro, usaremos el campo de velocidades para movimiento relativo aprendido en FI21A:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{R}_0} + \Omega \wedge \vec{r'}$$

Con este campo de velocidades determinamos la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

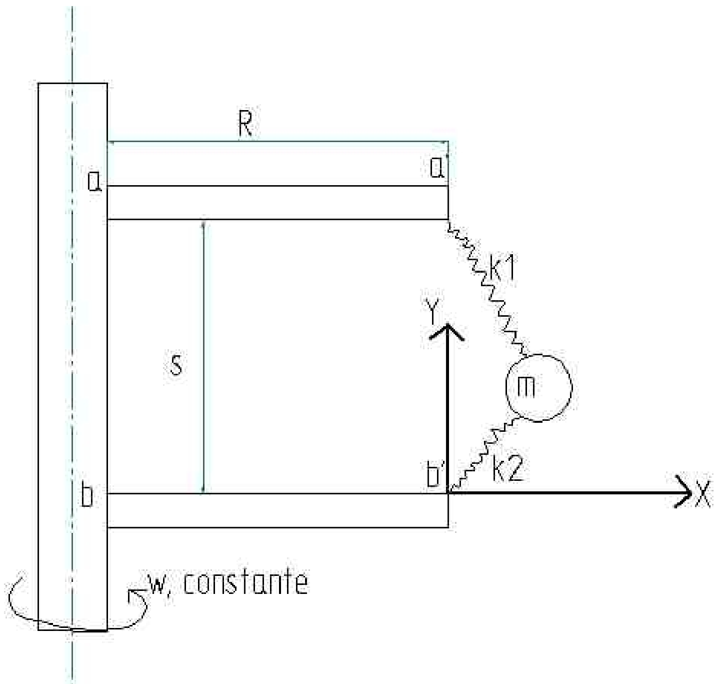

Figura 2: Problema 2

La energía potencial V se determina de manera trivial, y se calculará más adelante.
Para éste problema se usarán coordenadas **polares como sistema fijo inercial**, para describir el movimiento del origen del **sistema no inercial XYZ**, y cartesianas para el movimiento del cuerpo en este mismo sistema, y luego expresaremos cada vector en la base que se desee (siempre siendo consecuente con al notación y direcciones), en particular se tiene que:

$$\vec{R_0} = R\hat{\rho}$$

$$\dot{\vec{R_0}} = R\varpi\hat{\theta}$$

$$\vec{r'} = x\hat{X} + y\hat{Y} \Rightarrow \dot{\vec{r'}} = \dot{x}\hat{X} + \dot{y}\hat{Y}$$

Donde la derivada temporal se realiza sobre el sistema XYZ no inercial.

$$\Omega = \varpi\hat{k}$$

Usando entonces el campo de velocidades anterior, y notando que $\hat{\theta} \equiv \hat{Z}$ y que $\hat{k} \equiv \hat{Y}$, se tiene que:

$$\vec{v} = R\varpi\hat{Z} + \dot{x}\hat{X} + \dot{y}\hat{Y} + x\varpi\hat{Z}$$

Luego, L = T-V queda como sigue:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[(R+x)\varpi^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2] - [\frac{1}{2}k_2(\sqrt{x^2+y^2} - l_2)^2 + \frac{1}{2}k_1(\sqrt{x^2+(s-y)^2} - l_1)^2 + mgy]$$

Se puede observar trivialmente a qué corresponde T y V en la ecuación anterior. Ahora determinaremos las ecuaciones de movimiento, usando EL:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m[(R+x)\varpi^2 - k_2(\sqrt{x^2+y^2} - l_2)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - k_1(\sqrt{x^2+(s-y)^2} - l_1)\frac{x}{\sqrt{x^2+(s-y)^2}}$$

$$= m[(R+x)\varpi^2 - (k_1+k_2)x + \frac{xk_1l_1}{\sqrt{x^2+(s-y)^2}} + \frac{xk_2l_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

De la misma manera, se obtiene que:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg + (k_1+k_2)y - k_1s\frac{(s-y)k_1l_1}{\sqrt{x^2+(s-y)^2}} - \frac{yk_2l_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Finalmente:

$$m\ddot{x} = m[(R+x)\varpi^2 - (k_1+k_2)x + \frac{xk_1l_1}{\sqrt{x^2+(s-y)^2}} + \frac{xk_2l_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$m\ddot{y} = mg + (k_1+k_2)y - k_1s\frac{(s-y)k_1l_1}{\sqrt{x^2+(s-y)^2}} - \frac{yk_2l_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Aquí hemos utilizado el campo de velocidades para obtener la energía cinética. La energía potencial debe ser determinada en el mismo sistema (fijo o inercial) en que se determino la energía cinética. Esto es, ambas T y V deben quedar calculadas usando sistemas inerciales. Para el caso de los resortes, la energía es la misma calculada tanto en sistemas inerciales como no inerciales(la energía de un resorte es la medida de la energía contenida en la compresión o expansión de éste).