Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Mecánica

Clase Auxiliar Sistemas Dinámicos, FI21B: Ejercicios de Dinámica Lagrangeana

Máximo León Ganem

11 Mayo de 2004,*sujeto a cambios de redacción y errores

1. Ecuaciones de Euler Lagrange para Sistemas de Partículas y Sólidos

1.1. Prefacio a los Ejercicios: Un poco de Teoría

Hasta ahora, según todo lo que se ha visto, los problemas se pueden resolver usando dinámica de Newton, Conservación de Energía, Ecuaciones de Euler y las de torque ($\vec{\tau_O} = vecdotL_O$) que se han enseñado y usado exhaustivamente desde FI10A.

Ahora, con todo lo que se sabe de cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales, y los conocimientos de mecánica que se tienen por el momento, es posible introducir una herramienta muchísimo más poderosa: La dinámica de Lagrange, específicamente, las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL), cuya demostración ya se ha obtenido en clases de cátedra, y que corresponde a:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial q_i} = 0 \tag{1}$$

Con i =1,...,n y L=T-V, donde n es el número de *grados de libertad* (g.l.) del sistema, T es la energía cinética, V es el potencial, Q_i son las fuerzas generalizadas, que valen cero solo cuando están incluidas en el potencial V=V(q) conservativo, y q_i las coordenadas (generalizadas) que se usan para describir el movimiento de los cuerpos que componen el sistema dinámico en estudio.

Los *grados de libertad* de un sistema deben entenderse como 'la posibilidad de un cuerpo de moverse sin estar sometido a restricciones, tales como las de un péndulo que debe estar siempre describiendo una circunferencia, o una bolita que baja por un alambre en forma de espiral, de una ecuación conocida'.

Los *trabajos virtuales* deben entenderse como el trabajo de fuerzas como los roces-deslizantes, viscosos, etc- que realizan cuando se 'detiene' el tiempo y se verifica que son nulos cuando los trabajos respectivos sean cero. Por ejemplo, una partícula que desliza sobre una vara girando, en efecto hay un trabajo neto que ejerce la barra sobre la partícula que es distinto de cero, pero el trabajo virtual si lo es, pues si detenemos el tiempo y movemos la partícula sobre la vara que ahora 'no se mueve', (pues estamos analizando una foto del movimiento) cuando no hay roce deslizante, el trabajo virtual en la dirección de movimiento de la partícula sobre la vara es cero, y entonces $Q_i = 0$ en las ecuaciones (1),dado que solo hay fuerzas conservativas que *trabajan virtualmente* en el instante dado.

1.1.1. Ejercicios

Problema 1

Considere el sistema que se muestra en la figura1. Un tubo liso que forma un ángulo α con respecto a la horizontal, contiene 2 cuerpos de masa m_1, m_2 que se conectan mediante resortes de constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente. El tubo esta ubicado, a una distancia **s** del centro de la mesa, de manera que el plano que pasa por el centro del tubo también pasa por el eje de rotación de la mesa giratoria (a velocidad angular constante $\dot{\theta} = \varpi$. Ésta ultima está ubicada sobre un ascensor que se mueve hacia arriba con aceleración **a**. Obtenga las ecuaciones de movimiento, bajo la acción de la gravedad **g**, en función de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2.

Problema 2

El eje vertical de la figura 2 se hace rotar con velocidad angular ϖ constante. La partícula de masa **m** se puede mover libremente en el el plano de las dos barras aa' y bb', ambas de largo **R**, separadas por una distancia **s** constante, que rota con el eje y que pasa por su centro. Los resortes tienen constantes k_1 y k_2, y el movimiento se realiza bajo la acción de a gravedad. Determine las ecuaciones de movimiento de la partícula.

Problema 3

El disco D de en la figura 3, puede girar con velocidad angular $\dot{\phi}$ con respecto a su eje, que forma un ángulo θ constante con respecto a la horizontal. Al mismo tiempo el marco en el que está girando rota con velocidad $\dot{\psi}$ con respecto a su eje vertical (ver figura 3). Encuentre la velocidad angular $\vec{\varpi}$ del sólido, y con esto determine la ecuación de movimiento del sistema dinámico.

Solución:
Para encontrar $\vec{\varpi}$, debemos ubicar el sistema no inercial en los ejes principales del disco, y proyectar la velocidad angular en este sistema. Llamando $X_1Y_1Z_1$ al sistema fijo , XYZ al no inercial con origen en el centro de masas G y con la orientación de los ejes principales del disco D. Escribamos entonces la expresión general del a velocidad angular:

$$\vec{\varpi} = \dot{\phi}\hat{Z} + \dot{\psi}\hat{Z}_1$$

Lo único que resta hacer ahora es expresar los vectores que no corresponden a los ejes principales de inercia sobre éstos. En este caso, hay que proyectar Z_1 sobre el sistema no inercial XYZ, solidario al disco D. Luego:

$$Z_1 = \hat{X} sin\theta sin\phi + \hat{Y} sin\theta cos\phi + \hat{Z} cos\theta$$

Luego,

$$\vec{\varpi} = \dot{\psi}\hat{X} sin\theta sin\phi + \dot{\psi}\hat{Y} sin\theta cos\phi + (\dot{\phi} + \dot{\psi} cos\theta)\hat{Z}$$

Con esto, y notando que V=0, se llega fácilmente a que:

$$L = T = \frac{1}{2} I_x \dot{\psi}^2 sin^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} cos\theta)^2$$

La determinación de las ecuaciones de movimiento se dejan propuestas.

Ahora por razones pedagógicas, tomemos el origen del sistema no inercial en el extremo del eje, que sostiene al disco D y que esta ubicado a una distancia l de su centro de masa G, manteniendo la orientación anterior.

Si ahora nos colocamos con origen en O_1, el centro de masas se traslada, y por lo tanto debemos encontrar la energía asociada a éste cambio.

Usando el campo de velocidades,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{R}}_0 + \Omega \wedge \vec{r'}$$

Tenemos que

$$\vec{R_0} = lsin\theta\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R_0}} = lsin\theta\dot{\psi}\hat{\psi}$$

$$\Omega = \dot{\psi}\hat{Z}_1$$

$$\hat{r}' = l\hat{Z} \Rightarrow \dot{\hat{r}'} = \vec{0}$$

Con esto, y notando que dado que el disco es simétrico, podemos establecer que $\hat{\psi}$ $\equiv$ -$\hat{Y}$, con $\hat{Y}$ el vector unitario del sistema XYZ perpendicular a la hoja, saliendo de ésta; Entonces tenemos que,

$$\vec{v} = \vec{0} - lsin\theta\dot{\psi}\hat{Y} + \dot{\psi}\hat{Z}_1 \wedge l\hat{Z}$$

$$= -lsin\theta\dot{\psi}\hat{Y} + lsin\theta\dot{\psi}\hat{Y} = \vec{0}$$

La velocidad angular del disco es,

$$\vec{\varpi} = \dot{\psi}\hat{X}sin\theta sin\phi + \dot{\psi}\hat{Y}sin\theta cos\phi + (\dot{\phi} + \dot{\psi}cos\theta)\hat{Z}$$

Luego se obtiene la misma expresión para la energía cinética calculada anteriormente, con la diferencia de que I_{x,O_1} se calcula con respecto al nuevo origen O_1.

$$L = T = \frac{1}{2}I_{x,O_1}\dot{\psi}^2 sin^2\theta + \frac{1}{2}I_z(\dot{\phi} + \dot{\psi}cos\theta)^2$$

No importa que origen o que dirección tenga el triedro del sistema no inercial que se elija. Sin embargo, hay puntos mas aventajados que otros para describir el movimiento de un sistema dado, usando (EL).

Problema 4

Un trompo simétrico con momentos de inercia con I_1, I_3, de masa M y centro de gravedad ubicado a una distancia l desde la púa de éste, se coloca en movimiento con su eje inclinado en un ángulo $\theta_0 = \pi/2$, con un spin $\dot{\psi}$= s y precesión inicial $\dot{\phi}(0)$= Ω solamente. Determine la condición para que el movimiento θ_0 no varíe.

Solución:

El lagrangeano de un trompo es L=T-V. Dado que la velocidad angular del sólido es:

$$\vec{\varpi} = \hat{e_1}(\dot{\phi}sin\theta sin\psi + \dot{\theta}cos\psi) + \hat{e_2}(\dot{\phi}sin\theta cos\psi - \dot{\theta}sin\psi) + \hat{e_3}(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\theta)$$

Por lo tanto el lagrangeano queda, ordenando los términos y trasladando el eje principal de inercia al origen, donde esta la púa del trompo:

$$L = \frac{I_1'}{2}(\dot{\phi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\vartheta)^2 - Mglcos\theta$$

Hay que notar que L=L(θ, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ $\dot{\psi}$), por lo que se cumplirá que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \equiv P_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\vartheta)$$

y que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \equiv P_\phi = I_1\dot{\phi}sin^2\theta + P_\psi cos\theta$$

Las cantidades P_ψ y P_ϕ son constantes (se conservan) y son los llamados Momentos Generalizados. Con éstas cantidades podemos eliminar una de las variables $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ en el lagrangeano.

Para encontrar la condición pedida, usaremos que la energía se conserva, cuando no hay fuerzas no conservativas y el resultado obtenido anteriormente:

$$E = \frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(P_\phi - P_\psi cos\theta)^2}{2I_1' sin^2\theta} + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + Mglcos\theta.$$

Ahora , tenemos que la energía depende solo de θ y $\dot{\theta}$, y que el potencial efectivo asociado U es

$$U(\theta) = \frac{(P_\phi - P_\psi cos\theta)^2}{2I_1' sin^2\theta} + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + Mglcos\theta.$$

Para que dado un θ_0 sea constante (mínimo relativo tal que no hay nutación) y estable, debe cumplirse que

$$\frac{\partial U(\theta_0)}{\partial \theta} = 0 \ (I)$$

$$\frac{\partial^2 U(\theta_0)}{\partial \theta^2} > 0 \ (II)$$

Para este problema, trivialmente se puede observar que $P_\psi = I_3$s y que $P_\phi = I_1'\Omega$. Luego,

$$U = \frac{(I_1'\Omega - I_3 s \cdot cos\theta)^2}{2I_1' sin^2\theta} + \frac{(I_3 s)^2}{2I_3} + Mglcos\theta.$$

Derivando una vez U, se tiene obtiene la condición para que $\theta = \pi/2$ sea un mínimo, si además queremos que éste sea estable (no haya nutación) entonces debemos aplicar la condición (II). Luego, usando (I) y definiendo u=cosθ, se tiene

$$\frac{\partial U(u=0)}{\partial u} = Mgl - I_3\Omega s = 0\ (Equilibrio)$$

Es decir,

$$\Omega = \frac{Mgl}{I_3 s}$$

y usando (II), se verifica que para que u=0 ($\theta = \pi/2$) sea un equilibrio estable, debe cumplirse que,

$$\frac{\partial^2 U(u=0)}{\partial u^2} = \frac{(I_3 s)^2}{I_1'} + I_1'\Omega^2 > 0$$

Que siempre se cumple dado que todos los factores en la última ecuación son siempre positivos.

Aquí hemos utilizado el concepto conservación de energía y métodos usados en mecánica (FI21A) para obtener equilibrios. El reemplazo u=cosθ, fue útil en los cálculos en el momento de derivar, y de esa manera, realizar un análisis mas rápido.

Queda propuesto obtener las ecuaciones de movimiento para éste trompo, y obtener el mismo resultado anterior, para el mismo enunciado expuesto al inicio de éste problema.